Interrogation écrite n°2

Lundi 11 mai 2015

Durée : 55 min

Aucun document, calculatrice, téléphone portable ni appareil électronique n'est autorisé. Toute réponse devra être justifiée avec rigueur, soin et concision.

Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.

Exercice 1.

1) Rappeler trois conditions équivalentes pour qu'un anneau soit noethérien.
2) Si K est un corps commutatif, montrer que l'anneau $K[X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots]$ n'est pas noethérien.

Exercice 2. Considérons un anneau A et un A-module M.

1) Pour toute partie S de M, on pose $\operatorname{Ann}(S) = \{a \in A \mid \forall s \in S, as = 0\}$.
   (a) Vérifier que $\operatorname{Ann}(S)$ est un idéal de A.
   (b) Montrer que si le A-module M est noethérien, alors pour tout $m \in M$ le A-module $A/\operatorname{Ann}(m)$ est noethérien.
2) Soient N_1, N_2 des sous-modules de M. Montrer que si les A-modules M/N_1 et M/N_2 sont noethériens alors le A-module $M/(N_1 \cap N_2)$ est noethérien.
3) *Maintenant et jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que M est noethérien.* Justifier l'existence d'une famille génératrice finie de M.
4) On note $\{m_1, \ldots, m_s\}$ une telle famille. Montrer que

$$\operatorname{Ann}(M) = \operatorname{Ann}(m_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ann}(m_s).$$

5) En déduire que l'anneau $A/\operatorname{Ann}(M)$ est noethérien.