Feuille d'exercices n°1

Révisions et compléments

Tous les anneaux sont supposés unitaires et commutatifs.

Exercice 1. Si $(X-2)$, $(X+2)$, (X^2-4) et $(X-2, X+2)$ désignent les idéaux correspondants de $\mathbb{Z}[X]$, montrer les identités suivantes :

(i) $(X-2) \cap (X+2) = (X^2-4)$;

(ii) $(X-2, X+2) \cap \mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}$.

Exercice 2. Quels sont les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$ contenant $100\mathbb{Z}$?

Exercice 3. Rappeler la définition du produit IJ de deux idéaux I et J et en donner une famille génératrice. Montrer que IJ est contenu dans $I \cap J$.

Exercice 4. (i) Montrer que dans un anneau principal, tout idéal premier non nul est maximal.

(ii) Donner un exemple d'idéal premier non nul et non maximal.

Exercice 5 (Idéaux d'un quotient, théorèmes d'isomorphisme)**.** Soit I un idéal d'un anneau A.

(i) Montrer que les idéaux de A/I sont en correspondance bijective avec les idéaux de A contenant I.

(ii) Soit J un idéal de A contenant I. Montrer que $(A/I)/(J/I) \simeq A/J$.

(iii) En déduire les idéaux premiers et les idéaux maximaux de A/I. Déterminer les idéaux maximaux de l'anneau $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

(iv) Si A est principal, l'anneau quotient A/I est-il principal ?

(v) Soit B un sous-anneau de A. Montrer que $I \cap B$ est un idéal de B, que $B + I$ est un sous-anneau de A et que $B/(B \cap I) \simeq (B + I)/I$.

Exercice 6. Considérons l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer qu'on a des isomorphismes d'anneaux :

$$\mathbb{Z}[i] \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1), \qquad \mathbb{Z}[i]/(p) \simeq \mathbb{F}_p[X]/(X^2 + 1)$$

pour tout nombre premier p.

Exercice 7. Donner un exemple d'anneau :

(i) de caractéristique nulle ; non nulle ; un anneau infini de caractéristique non nulle ;

(ii) intègre ; non intègre ;

(iii) factoriel ; intègre et non factoriel (on pourra factoriser 4 dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$) ;

(iv) principal ; factoriel et non principal.

Exercice 8. Soit A l'anneau des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Fixons $x \in [0, 1]$ et considérons $I_x = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$. Montrer que I_x est un idéal maximal de A. Est-il principal ? Que se passe-t-il si on remplace A par $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 9. Soit $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ l'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

(i) Montrer que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ est intègre. Quel est son corps des fractions ?

(ii) Déterminer les éléments inversibles et les éléments irréductibles de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

(iii) Montrer que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ n'est pas factoriel.

Exercice 10. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) A est un corps ;

(ii) $A[X]$ est un anneau euclidien ;

(iii) $A[X]$ est un anneau principal.

Exercice 11. Rappeler une description des éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 12. Montrer que les idéaux suivants sont premiers dans les anneaux indiqués :

(i) (X^2+1) dans $\mathbb{R}[X,Y]$;

(ii) (YX^4+Y^2-1) dans $\mathbb{Z}[X,Y]$.

Exercice 13. Soit $I=(X^3-Y^2)$, idéal de l'anneau $A=K[X,Y]$ (où K est un corps).

(i) À l'aide d'une division euclidienne, montrer que $P(X^2,X^3)=0 \iff P(X,Y)\in I$.

(ii) En déduire que A/I est intègre.

(iii) Montrer que $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont non inversibles et irréductibles dans A/I.

(iv) En déduire que A/I n'est pas factoriel.

Exercice 14. (i) Démontrer le théorème de Krull : tout idéal propre de A (c'est-à-dire $I\neq A$) est contenu dans un idéal maximal de A.
Indication. On rappelle le lemme de Zorn [1] : si un ensemble ordonné non vide E est tel que tout sous-ensemble totalement ordonné possède un majorant, alors E possède un élément maximal.

(ii) En déduire que tout élément d'un anneau est soit inversible, soit contenu dans un idéal maximal.

1. Qui est équivalent à l'axiome du choix.