Feuille d'exercices n°2

Spectre d'un anneau

Tous les anneaux sont supposés unitaires et commutatifs.

Nilradical, radical

Exercice 1. Donner des exemples d'anneaux réduits non intègres.

Exercice 2. Calculer le nilradical de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ où p est premier et $n \geq 1$.

Exercice 3. Si I est un idéal de A, on note $r(I)$ son radical.

(i) Calculer $r(5\mathbb{Z})$; $r(4\mathbb{Z})$; $r(m\mathbb{Z})$ où $m \in \mathbb{N}$.

(ii) Montrer que $I \subset r(I)$ et $r(r(I)) = r(I)$.

(iii) Montrer que $r(IJ) = r(I \cap J) = r(I) \cap r(J)$ où I, J sont des idéaux de A.

(iv) Montrer que $r(I) = A$ si et seulement si $I = A$.

(v) Montrer que si I est premier, on a $r(I^n) = I$ pour tout entier $n > 0$.

Exercice 4. Soit I un idéal de A. Comment sont reliés le radical $r(I)$ et le nilradical $\mathcal{N}(A/I)$? En déduire le nilradical de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ pour $m \geq 1$.

Spectre d'un anneau

Exercice 5. Calculer $V(2,3)$ dans $\mathbb{Z}$ et $V(X^8 - 2X^4 + 1)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6. Déterminer les spectres des anneaux : $\mathbb{C}[X]$; $\mathbb{R}[X]$; $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $n \geq 2$.

Exercice 7. (i) Soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Montrer que l'adhérence $\overline{\{\mathfrak{p}\}}$ du point $\mathfrak{p}$ est l'ensemble $V(\mathfrak{p})$ des idéaux premiers de A qui contiennent $\mathfrak{p}$. En déduire que le point $\mathfrak{p}$ est fermé si et seulement si l'idéal $\mathfrak{p}$ est maximal.

(ii) Si A est principal, montrer que tout point de $\operatorname{Spec} A$ est fermé ou dense dans $\operatorname{Spec} A$.

Exercice 8. Pour tout f dans l'anneau A, on pose $X_f = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$. Montrer que :

(i) X_f est un ouvert de $\operatorname{Spec} A$;

(ii) pour tous f, g de A, $X_f \cap X_g = X_{fg}$;

(iii) $X_f = \emptyset \iff f$ nilpotent ;

(iv) $(X_f)_{f \in A}$ est une base d'ouverts [1] de $\operatorname{Spec} A$;

(v) $\operatorname{Spec} A$ est quasi-compact [2]. Indication : considérer un recouvrement par $(X_{f_i})_{i \in I}$ et montrer que l'idéal engendré par $(f_i)_{i \in I}$ est A.

Exercice 9. Un espace topologique X est dit *irréductible* si X ne s'écrit pas sous la forme $F_1 \cup F_2$ où F_1 et F_2 sont des fermés propres de X (c'est-à-dire distincts de X).

(i) Montrer que :

(a) X est irréductible si et seulement si tout ouvert non vide de X est dense dans X ;

(b) si X est irréductible alors X est connexe.

1. C'est-à-dire que tout ouvert de $\operatorname{Spec} A$ peut s'écrire comme réunion de tels ouverts X_f.
2. C'est-à-dire que tout recouvrement ouvert de $\operatorname{Spec} A$ possède un sous-recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue).

(ii) Montrer que :

(a) si l'anneau A est intègre, alors $\operatorname{Spec} A$ est irréductible ;

(b) si $\operatorname{Spec} A$ est irréductible et A est réduit, alors A est intègre ;

(c) pour tout idéal $\mathfrak{a}$, $V(\mathfrak{a})$ est irréductible (pour la topologie induite) si et seulement si $r(\mathfrak{a})$ est premier.

Exercice 10. Soient A un anneau et $A_{\text{red}} = A/\mathcal{N}(A)$. Soit $\varphi : A \to A_{\text{red}}$ la projection canonique. Montrer que l'application associée $\varphi^* : \operatorname{Spec} A_{\text{red}} \to \operatorname{Spec} A$ est un homéomorphisme.