**Feuille d'exercices n°3**

# Théorème des zéros (Nullstellensatz)

Tous les anneaux sont supposés unitaires et commutatifs. La lettre $k$ désignera un corps.

## Ensembles algébriques

**Exercice 1.** Identifier les ensembles algébriques suivants :

(i) $Z(X^2+Y^2-1)$ et $Z(X^2+Y^2+1)$ dans $\mathbb{R}^2$ ;

(ii) $Z(X_1-a_1,\dots,X_n-a_n)$ dans $k^n$, où $(a_1,\dots,a_n)\in k^n$ ;

(iii) $Z(XY)$ et $Z(X^{2014}Y^{2015})$ dans $k^2$.

**Exercice 2.** (i) Montrer que $\{(t^2,t^3)\mid t\in k\}$ est un ensemble algébrique de $k^2$.

(ii) Montrer que $V=\{(x,\sin x)\mid x\in\mathbb{R}\}$ n'est pas un ensemble algébrique de $\mathbb{R}^2$. Indication : si $V=Z(I)$ avec $I$ idéal de $\mathbb{R}[X,Y]$, montrer que tout $P(X,Y)\in I$ vérifie $P(X,0)=0$.

**Exercice 3.** Identifier les idéaux suivants :

(i) $I(E)$ dans $k[X]$ où $E$ est une partie finie du corps $k$ ;

(ii) $I(\mathbb{F}_p)$ dans $\mathbb{F}_p[X]$ ;

(iii) $I(a_1,\dots,a_n)$ dans $k[X_1,\dots,X_n]$ où $(a_1,\dots,a_n)\in k^n$.

**Exercice 4.** (i) Montrer que le nombre irrationnel $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est entier sur $\mathbb{Z}$.

(ii) Soit $A$ un sous-anneau d'un anneau intègre $B$. L'ensemble des éléments de $B$ entiers sur $A$ est appelé la *fermeture intégrale* de $A$ dans $B$. Montrer que cette fermeture intégrale est un sous-anneau de $B$.

(iii) Montrer que la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{Z}$.

## Théorème des zéros

**Exercice 5.** Si $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{A}^n_k$, montrer que l'idéal $(X_1-a_1,\dots,X_n-a_n)$ de $k[X_1,\dots,X_n]$ est maximal.

**Exercice 6.** (i) Donner un exemple d'idéal $I$ de polynômes sur un corps non algébriquement clos vérifiant $r(I)\subsetneq I(Z(I))$.

(ii) Soit $I$ l'idéal de $\mathbb{Q}[X,Y]$ engendré par $X+1$ et $Y^2+2$. Montrer que cet idéal est maximal mais qu'il n'existe aucun couple $(a,b)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ tel que $I=(X-a,Y-b)$.

**Exercice 7.** Un idéal $I$ d'un anneau est dit *radical* s'il vérifie $r(I)=I$. Si $k$ est un corps algébriquement clos, donner une bijection entre d'une part l'ensemble des ensembles algébriques de $\mathbb{A}^n_k$, et d'autre part les idéaux radicaux de $k[X_1,\dots,X_n]$.

**Exercice 8.** Soient $k$ un corps algébriquement clos.

(i) Montrer que $Z(I)=\{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{A}^n_k\mid I\subset(X_1-a_1,\dots,X_n-a_n)\}$ pour tout idéal $I$ de $k[X_1,\dots,X_n]$.

(ii) Le *spectre maximal* d'un anneau $A$ désigne l'ensemble des idéaux maximaux de $A$. Il est noté $\operatorname{Spm} A$ et muni de la topologie induite par celle de Zariski sur $\operatorname{Spec} A$. Montrer que les espaces topologiques $\operatorname{Spm}(k[X_1,\dots,X_n])$ et $\mathbb{A}^n_k$ (ce dernier, muni de sa topologie de Zariski) sont homéomorphes.

**Exercice 9.** Soit $k$ un corps algébriquement clos. Considérons un ensemble algébrique $V = Z(I)$ où $I$ est un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$. Une fonction $f : V \to k$ est dite *fonction polynomiale sur $V$* s'il existe un polynôme $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in V, \quad f(x_1, \dots, x_n) = P(x_1, \dots, x_n).$$

L'ensemble des fonctions polynomiales sur $V$ est noté $\Gamma(V)$.

(i) Justifier que $\Gamma(V)$ est un anneau commutatif unitaire.

(ii) Montrer que $\Gamma(V)$ est isomorphe à $k[X_1, \dots, X_n]/r(I)$.

(iii) En déduire une bijection entre $V$ et l'ensemble des idéaux maximaux de $\Gamma(V)$.

**Exercice 10.** Un anneau $A$ est dit *de Jacobson* si pour tout idéal $I$ de $A$, le radical $r(I)$ est égal à l'intersection des idéaux maximaux de $A$ qui contiennent $I$. L'objectif de l'exercice est de montrer que les anneaux $k[X_1, \dots, X_n]$ et $k[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ sont de Jacobson. Notons $\overline{k}$ la clôture algébrique du corps $k$.

(i) *Le cas polynomial.*

 (a) Si $k$ est algébriquement clos, montrer que $k[X_1, \dots, X_n]$ est un anneau de Jacobson. Indication : utiliser le théorème des zéros.

 (b) Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $\overline{k}[X_1, \dots, X_n]$. Montrer que l'idéal $\mathfrak{m} \cap k[X_1, \dots, X_n]$ est maximal dans $k[X_1, \dots, X_n]$.

 (c) Si $k$ est quelconque, montrer que $k[X_1, \dots, X_n]$ est un anneau de Jacobson. Indication : si $I$ est un idéal de cet anneau, appliquer le cas algébriquement clos à l'idéal $\overline{I}$ engendré par $I$ dans $\overline{k}[X_1, \dots, X_n]$ puis utiliser la question ib.

(ii) *Le cas des anneaux de type fini.* Soit $A = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, anneau de type fini sur $k$. Montrer que $A$ est un anneau de Jacobson. Indication : interpréter $A$ comme un quotient de $k[X_1, \dots, X_n]$ et se ramener à appliquer le cas polynomial.