Feuille d'exercices n°4

Localisation

Tous les anneaux sont supposés unitaires et commutatifs.

Exercice 1. Soit S une partie multiplicative d'un anneau A. Déterminer le noyau du morphisme canonique $A \to S^{-1}A$.

Exercice 2. Identifier à un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ l'anneau localisé de $\mathbb{Z}$ par rapport à $S = \mathbb{Z} - 7\mathbb{Z}$.

Exercice 3. Soit $A = \mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$. Posons $S = \{\overline{3}^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

1) Déterminer l'élément $\frac{\overline{11}}{\overline{3}}$ de $S^{-1}A$.
2) Calculer le noyau du morphisme canonique $A \to S^{-1}A$. En déduire que $S^{-1}A$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Pour $A = \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ et $S = \{\overline{2}^k \mid k \in \mathbb{N}\}$, montrer que $S^{-1}A$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Soient A l'anneau des fonctions continues de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\mathfrak{m} = \{f \in A \mid f(0) = 0\}$ (c'est un idéal maximal ; cf. feuille n°1). Soit I l'ensemble des fonctions $f \in A$ telles qu'il existe un voisinage de U de 0, dépendant de f, tel que $f_{|U} = 0$.

1) Vérifier que I est un idéal de A.
2) L'anneau $\mathcal{G} = A/I$ est appelé *l'anneau de germes en* 0 *des fonctions continues*. Montrer que $\mathcal{G}$ est isomorphe à $A_\mathfrak{m}$, le localisé de A en $A - \mathfrak{m}$.

Exercice 6.

1) Soient S une partie multiplicative d'un anneau A et I un idéal de A. Montrer que l'idéal $S^{-1}I = \{\frac{i}{s} \mid i \in I, s \in S\}$ est égal à $S^{-1}A$ si et seulement si $I \cap S \neq \emptyset$.
2) Posons $A = \mathbb{Z}$ et $S = \mathbb{Z} - 5\mathbb{Z}$.
   (a) Soient $I = 5\mathbb{Z}$ et $I' = 10\mathbb{Z}$. Montrer que $S^{-1}I = S^{-1}I'$.
   (b) Soit $J = 7\mathbb{Z}$. Déterminer l'idéal $S^{-1}J$.

Exercice 7. Soient S une partie multiplicative d'un anneau A et I un idéal de A.

1) Si I est premier et $I \cap S = \emptyset$, montrer que l'idéal $S^{-1}I$ est premier.
2) Montrer que tout idéal premier de $S^{-1}A$ s'écrit $S^{-1}I$ avec I premier et $I \cap S = \emptyset$.
3) Soit $A_\mathfrak{p}$ le localisé de A par rapport à $A - \mathfrak{p}$, avec $\mathfrak{p}$ idéal premier de A. Montrer que tout idéal propre de $A_\mathfrak{p}$ est contenu dans $S^{-1}\mathfrak{p}$. En déduire que $A_\mathfrak{p}$ est un *anneau local* c'est-à-dire n'ayant qu'un idéal maximal.

Exercice 8. Montrer que $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ est homéomorphe à l'ensemble

$$X_S = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A, \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$$

ce dernier étant muni de la topologie induite.

Exercice 9. Soient M un A-module de type fini et S une partie multiplicative de A. Montrer que $S^{-1}M = 0$ si et seulement s'il existe $s \in S$ tel que $sM = 0$.
Application : déterminer le localisé du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ par rapport à $\mathbb{Z} - 3\mathbb{Z}$.

Exercice 10. Soit M un A-module. Montrer l'équivalence des affirmations suivantes :

1) $M = 0$;
2) pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $M_{\mathfrak{p}} = 0$;
3) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $M_{\mathfrak{m}} = 0$.

Exercice 11. Soit $f : M \to N$ un morphisme de A-modules. Montrer l'équivalence des affirmations suivantes :

1) f est injectif ;
2) pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, le morphisme induit $f_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ est injectif ;
3) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$, le morphisme induit $f_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ est injectif.

Indication : pour 3) $\Rightarrow$ 1), on pourra utiliser l'exercice précédent.
Ainsi l'injectivité est une *propriété locale* : elle est vérifiée si et seulement si elle l'est localement en tout idéal premier.