Feuille d'exercices n°5

Anneaux et modules noethériens

Tous les anneaux sont encore supposés unitaires et commutatifs.

Exercice 1. Les anneaux suivants sont-ils noethériens ? Justifier votre réponse.

1) le produit de deux anneaux noethériens ;
2) l'anneau $A[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ où A est un anneau noethérien et un sous-anneau de B, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans B ;
3) $\mathbb{Z}_{(2)}[X]/(X^2+1)$, où $\mathbb{Z}_{(2)}$ est le localisé de $\mathbb{Z}$ par rapport à $\mathbb{Z} - 2\mathbb{Z}$;
4) un sous-anneau d'un anneau noethérien.

Exercice 2. La réciproque du théorème de la base de Hilbert est-elle vraie ?

Exercice 3. Montrer que tout fermé de k^n pour la topologie de Zariski est l'ensemble des zéros communs à un nombre fini de polynômes.

Exercice 4. Donner un exemple d'anneau :

1) factoriel et non noethérien ;
2) noethérien et non intègre ;
3) noethérien, intègre et non factoriel (indication : étudier $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$).

Exercice 5. Soit un anneau intègre noethérien A. Montrer que si $t \notin A^\times$ alors $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} t^n A = \{0\}$.

Indication : prendre un élément dans l'intersection et chercher à construire une suite d'idéaux.

Exercice 6. Un espace topologique est dit *noethérien* si toute suite croissante d'ouverts est stationnaire.

1) Montrer que si A est noethérien alors $\operatorname{Spec} A$ est noethérien.
2) Montrer que la réciproque est fausse sur l'exemple suivant : $R = k[X_1, X_2, \dots]$, I l'idéal de R engendré par $X_1^2, X_2^2, \dots$ et $A = R/I$.

Exercice 7. Identifier les K-modules noethériens ; les $\mathbb{Z}$-modules noethériens ; les A-modules de type fini avec A noethérien. Donner un exemple de module de type fini, ayant un sous-module qui n'est pas de type fini.

Exercice 8. Les modules suivants sont-ils noethériens ? Justifier votre réponse.

1) un module de type fini ;
2) le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}[X]$;
3) le $\mathbb{C}[X]$-module $\mathbb{C}[X]/(P(X))$;
4) le produit direct de deux modules noethériens.

Exercice 9. Soient M un A-module noethérien et u un endomorphisme de M.

1) En considérant la suite $(\operatorname{Ker} u^n)_{n\geq 1}$, montrer qu'il existe un entier n tel que $(\operatorname{Ker} u^n) \cap (\operatorname{Im} u^n) = \{0\}$.
2) Montrer que si u est surjectif, alors u est injectif.
3) Donner un exemple d'endomorphisme injectif et non surjectif.

Exercice 10. Soit k un corps algébriquement clos. Soit $F = Z(I)$ un fermé de Zariski de k^n où I est un idéal propre de $k[X_1, \dots, X_n]$.

1) Soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\ell$ les idéaux premiers minimaux de $k[X_1, \dots, X_n]$ contenant I. Justifier l'existence de ces idéaux. Posons $F_i = Z(\mathfrak{p}_i)$. Montrer que les F_i sont irréductibles, $F_i \not\subseteq F_j$ pour tous $i \neq j$ et $F = F_1 \cup \dots \cup F_\ell$.
2) Montrer que l'écriture $F = F_1 \cup \dots \cup F_\ell$ avec des fermés irréductibles F_i vérifiant $F_i \not\subseteq F_j$ pour tous $i \neq j$, est unique à permutation près. Les $F_1, \dots, F_\ell$ sont appelés les *composantes irréductibles de* F.
3) Déterminer les composantes irréductibles de $Z(XY, XZ)$ dans k^3.
4) Même question avec $Z(X^2 - YZ, XZ - X)$ dans k^3. En déduire les idéaux premiers minimaux de $k[X, Y, Z]$ contenant l'idéal $(X^2 - YZ, XZ - X)$.