Cours général d'algèbre

M2 mathématiques

Université de Franche-Comté

2021-2022

Cécile Armana

Table des matières

1 Méthode du pivot de Gauss et applications 5

1.1 Les matrices échelonnées réduites 5

1.2 Les opérations élémentaires 6

1.3 La méthode du pivot 7

1.3.1 Énoncé 7

1.3.2 L'algorithme 9

1.4 Applications pratiques 10

1.4.1 Résoudre un système linéaire 10

1.4.2 Calculer l'inverse d'une matrice 10

1.4.3 Dire si une famille est libre ou liée, en extraire une base, calculer son rang 11

1.4.4 Compléter une famille libre en une base, déterminer un supplémentaire 11

1.4.5 Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire 11

1.4.6 Déterminer une somme et une intersection de sous-espaces vectoriels 11

1.5 Applications théoriques 12

1.6 Exercices 15

2 Dualité en algèbre linéaire 17

2.1 Espace dual 17

2.1.1 Définitions 17

2.1.2 Base duale 18

2.1.3 Bidual 18

2.2 Orthogonalité au sens de la dualité 19

2.2.1 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel 19

2.2.2 Hyperplans 21

2.2.3 Système d'équations d'un sous-espace vectoriel 21

2.3 Transposée **22**
2.3.1 Application transposée 22
2.3.2 Écriture matricielle 23
2.4 Espace vectoriel quotient – illustration en dualité **23**
2.4.1 Construction et propriétés 23
2.4.2 Dual du quotient et orthogonal 24
2.5 Exercices **25**

3 Formes quadratiques 27
3.1 Généralités sur les formes quadratiques **27**
3.1.1 Rappels sur les formes bilinéaires 27
3.1.2 Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques 29
3.1.3 Noyau, rang, discriminant 32
3.2 Orthogonalité et isotropie **33**
3.2.1 Orthogonal pour une forme quadratique 33
3.2.2 Vecteurs isotropes, cône isotrope 34
3.3 Bases orthogonales pour une forme quadratique **35**
3.3.1 Définition et existence théorique d'une base orthogonale 35
3.3.2 Existence en pratique : décomposition en carrés, méthode de Gauss 36
3.4 Classification des formes quadratiques **38**
3.4.1 Généralités 38
3.4.2 Classification sur $\mathbb{C}$ 39
3.4.3 Classification sur $\mathbb{R}$ 39
3.4.4 Classification sur un corps fini 41
3.4.5 Récapitulatif 42
3.5 Formes quadratiques sur un espace euclidien **42**
3.6 Groupe orthogonal d'une forme quadratique **44**
3.6.1 Groupes orthogonal et spécial orthogonal 44
3.6.2 Exemple : les symétries orthogonales 45
3.6.3 Générateurs de $\mathrm{O}(q)$ et $\mathrm{SO}(q)$ 45
3.7 Exercices **47**

1. Méthode du pivot de Gauss et applications

Révisions personnelles : algèbre linéaire, théorie de la dimension.
Au programme du concours de l'agrégation : paragraphes 1.1.a, 1.2.a, 1.2.b, 1.2.c, 2.a.

Références possibles pour la méthode du pivot avec les matrices échelonnées réduites :
— Ph. Caldero et J. Germoni, *(Nouvelles) Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, tome 1*, Calvage & Mounet,
— J.-É. Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre & Géométrie*, De Boeck,
— G. Skandalis, *Agrégation interne : algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie*, Calvage & Mounet.

Dans ce chapitre et les suivants, K désigne un corps commutatif.

1.1 Les matrices échelonnées réduites

Soit A une matrice de $M_{m,n}(K)$.

Définition 1.1 — Pivot, matrice échelonnée réduite. Un **pivot** de A est le coefficient non nul situé le plus à gauche sur une ligne non nulle de A.

La matrice A est dite **échelonnée réduite (selon les lignes)** lorsqu'elle satisfait les conditions suivantes :

1) si une ligne est nulle, toutes celles situées dessous sont nulles ;
2) sur chaque ligne non nulle, le pivot est situé strictement plus à droite que le pivot de la ligne précédente ;
3) tous ses pivots valent 1 ;
4) dans chaque colonne contenant un pivot, tous les autres coefficients sont nuls.

■ **Remarque 1.2** Sur les colonnes contenant un pivot ✎ ■

■ **Exemple 1.3** Illustrations de la définition 1.1 ✎ ■

Proposition 1.4 — Rang et colonnes d'une matrice échelonnée réduite. Soit $A \in M_{m,n}(K)$ une matrice échelonnée réduite. Notons r le nombre de pivots de A et $j_1, \dots, j_r$ les numéros des colonnes de A contenant un pivot. Alors :

1) le rang de A est égal à r ;
2) une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(A_1, \dots, A_n)$ engendré par les vecteurs colonnes $A_1, \dots, A_n$ de A est $(A_{j_1}, \dots, A_{j_r})$;
3) les coefficients des autres colonnes permettent de décomposer ces vecteurs dans la base $(A_{j_1}, \dots, A_{j_r})$.

■ **Exemple 1.5** ✎

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ■

1.2 Les opérations élémentaires

Définition 1.6 — Matrices élémentaires.

1) Pour $i \neq j$ dans $\{1, \dots, n\}$ et $\lambda \in K$, on pose :

$$T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} \quad \in M_n(K)$$

où $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à la i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1.

2) Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\lambda \in K^*$, on pose :

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i} \quad \in M_n(K).$$

3) Pour toute permutation σ dans $\mathcal{S}_n$, on définit $P_\sigma \in M_n(K)$ par $(P_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$ (symbole de Kronecker).
Cas particulier : si $\sigma = (i, j)$ transposition avec $i \neq j$ alors $P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

✎

Proposition 1.7 — Propriétés des matrices élémentaires.

1) Les matrices élémentaires $T_{i,j}(\lambda)$, $D_i(\lambda)$ et P_σ sont inversibles et :

$$T_{i,j}(\lambda)^{-1} = \qquad , \quad D_i(\lambda)^{-1} = \qquad , \quad (P_\sigma)^{-1} =$$

2) Les applications suivantes sont des morphismes de groupes :

$$\begin{array}{rcl} (K,+) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(K) \\ \lambda & \longmapsto & T_{i,j}(\lambda) \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} (K^*,\cdot) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(K) \\ \lambda & \longmapsto & D_i(\lambda) \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} (\mathcal{S}_n,\circ) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(K) \\ \sigma & \longmapsto & P_\sigma. \end{array}$$

3) Les déterminants des matrices élémentaires sont :

$$\det T_{i,j}(\lambda) = \qquad , \quad \det D_i(\lambda) = \qquad , \quad \det P_\sigma = \qquad .$$

Démonstration. Laissée à titre d'entraînement. ■

■ **Remarque 1.8** ✎ Toute matrice P_σ est produit de matrices de transpositions $P_{i,j}$. ■

Le tableau suivant recense les **opérations élémentaires** *sur les lignes* $L_1, \dots, L_m$ d'une matrice $A \in M_{m,n}(K)$, que vous connaissez déjà, et leur interprétation matricielle.

Nom	*Opération élémentaire*	*Interprétation matricielle*
Transvection	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in K$	$A \mapsto T_{i,j}(\lambda)A$
Dilatation	$L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \in K^*$	$A \mapsto D_i(\lambda)A$
Permutation	$(L_1, \dots, L_n) \leftarrow (L_{\sigma(1)}, \dots, L_{\sigma(n)})$ Cas particulier : $L_i \leftrightarrow L_j$	$A \mapsto P_{\sigma^{-1}}A$ $A \mapsto P_{i,j}A$.

Voici celui pour les opérations élémentaires *sur les colonnes* $C_1, \dots, C_n$ d'une matrice $A \in M_{m,n}(K)$:

Nom	*Opération élémentaire*	*Interprétation matricielle*
Transvection	$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in K$	$A \mapsto AT_{j,i}(\lambda)$
Dilatation	$L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \in K^*$	$A \mapsto AD_i(\lambda)$
Permutation	$(C_1, \dots, C_n) \leftarrow (C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)})$ Cas particulier : $C_i \leftrightarrow C_j$	$A \mapsto AP_\sigma$ $A \mapsto AP_{i,j}$.

Principe

On appelle **relation de liaison** (ou relation de dépendance linéaire) entre des vecteurs une combinaison linéaire de ces vecteurs qui est égale au vecteur nul.

> **Proposition 1.9 — Conséquence sur les liaisons entre colonnes et le rang.** Soit $A \in M_{m,n}(K)$. Si $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ alors les matrices A et PA ont les mêmes relations de liaison entre leurs colonnes. En particulier, on a $\mathrm{rg}(PA) = \mathrm{rg}\, A$.

Démonstration. ■

Conséquence sur le déterminant

■ **Remarque 1.10** La matrice $T_{i,j}(\lambda)$ est un cas particulier de matrice d'une *transvection vectorielle* c'est-à-dire d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E tel qu'il existe un hyperplan H avec $f_{|H} = \mathrm{id}_H$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}) \subset H$. De même, la matrice $D_i(\lambda)$ est un cas particulier de matrice d'une *dilatation vectorielle* c'est-à-dire d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E tel qu'il existe un hyperplan H avec $f_{|H} = \mathrm{id}_H$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}) \not\subset H$. À ce sujet, on pourra consulter le *Cours d'algèbre* de D. Perrin, chapitre IV. ■

1.3 La méthode du pivot

1.3.1 Énoncé

> **Théorème 1.11 — Méthode du pivot (sur les lignes).** Soit $A \in M_{m,n}(K)$. La matrice A peut être transformée en une *unique* matrice échelonnée réduite $\tilde{A}$ par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes de A. La matrice $\tilde{A}$ est appelée la **réduite de Gauss** de A.

Ainsi il *existe* une *unique* matrice échelonnée réduite $\tilde{A}$ telle qu'il existe $P_1,\dots,P_k$ dans $\mathrm{GL}_m(K)$, matrices d'opérations élémentaires, avec $P_k\cdots P_1A=\tilde{A}$. En posant $P=P_k\cdots P_1\in\mathrm{GL}_m(K)$, on a $PA=\tilde{A}$.

■ **Remarque 1.12**
— D'après la proposition 1.9, les matrices A et $\tilde{A}$ ont mêmes relations de liaison entre leurs colonnes et même rang.
— La matrice $\tilde{A}$ est unique mais la suite de matrices $P_1,\dots,P_k$ ne l'est pas.
— Cette méthode utilise des opérations élémentaires *sur les lignes uniquement*. Si on s'autorise à opérer aussi sur les colonnes, la forme de la réduite de Gauss se simplifie (voir le théorème de Gauss–Jordan, paragraphe 1.5) mais certaines applications que nous verrons au paragraphe 1.4 ne seront plus valables.
— On peut aussi chercher à restreindre le type d'opérations élémentaires qu'on utilise sur les lignes. Voir la discussion sur les générateurs de $\mathrm{SL}_n(K)$, paragraphe 1.5.

■

La démonstration de ce théorème fera l'objet d'un algorithme présenté au paragraphe 1.3.2.

Interprétation en termes d'une action de groupe

Soit un groupe G opérant sur un ensemble X. Les orbites de cette action donnent une partition de l'ensemble X. Les actions de groupes permettent ainsi de *classifier* des objets mathématiques en regroupant ceux qui sont dans la même orbite.

On comprend mieux cette classification si on dispose de quantités simples à calculer et qui permettent de distinguer les orbites (des *invariants*), d'identifier les orbites (des *invariants totaux*), ou si on connaît un représentant « canonique » de chaque orbite (une *forme normale*). Leur obtention est l'enjeu de nombreuses théories algébriques. À ce sujet, on pourra consulter l'ouvrage *(Nouvelles) Histoires hédonistes...*

■ **Exemple 1.13** Matrices équivalentes, matrices semblables. ■

Nous allons voir que la méthode du pivot classifie l'action de groupe suivante.

Proposition 1.14 — Action de $\mathrm{GL}_m(K)$ par multiplication sur les matrices. Le groupe $\mathrm{GL}_m(K)$ agit sur $M_{m,n}(K)$ par multiplication à gauche :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_m(K)\times M_{m,n}(K) & \longmapsto & M_{m,n}(K) \\ (P,A) & \longmapsto & PA. \end{array}$$

Pour cette action, l'orbite d'une matrice A de $M_{m,n}(K)$ est $\{PA \mid P\in\mathrm{GL}_m(K)\}$.

Démonstration. Laissée comme entraînement (c'est une occasion de réviser la définition d'une action de groupe). ■

Voici déjà un invariant total pour cette action.

Proposition 1.15 — Caractérisation de l'orbite d'une matrice. Soient A et A' deux matrices dans $M_{m,n}(K)$. Alors A et A' sont dans la même orbite pour l'action précédente si et seulement si $\operatorname{Ker}A=\operatorname{Ker}A'$.

Démonstration. ($\Rightarrow$)
($\Leftarrow$) Voir l'exercice 1.10. ■

■ **Remarque 1.16** On pourrait définir une autre action à gauche de $\mathrm{GL}_m(K)$ sur $M_{m,n}(K)$ donnée par $(P,A)\mapsto AP^{-1}$. Pour celle-ci, il est possible de montrer que deux matrices A et A' sont dans la même classe d'équivalence si et seulement si $\operatorname{Im}A=\operatorname{Im}A'$. ■

Le théorème 1.11 (méthode du pivot) revient à dire que les matrices échelonnées réduites sont des formes normales pour les orbites de l'action.

Théorème 1.17 — Méthode du pivot, version action de groupe. Soit $A \in M_{m,n}(K)$. Alors il existe une unique matrice échelonnée réduite $\tilde{A} \in M_{m,n}(K)$ telle que A et $\tilde{A}$ sont dans la même orbite pour l'action par multiplication à gauche de $\mathrm{GL}_m(K)$.

Pour cette action, une orbite est donc *caractérisée par l'unique matrice échelonnée réduite* qui s'y trouve. En notant $\mathcal{E}_{m,n}$ l'ensemble des matrices échelonnées réduites de $M_{m,n}(K)$, on obtient donc la partition :

$$M_{m,n}(K) = \bigsqcup_{E \in \mathcal{E}_{m,n}} \mathrm{GL}_m(K)\,E.$$

1.3.2 L'algorithme

Nous ne démontrerons que l'existence de la matrice échelonnée réduite $\tilde{A}$ en donnant un algorithme qui se déroule par étapes successives sur les colonnes. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{m,n}(K)$. Si la matrice A est nulle, elle est déjà échelonnée réduite. Supposons donc $A \neq 0$.

Mise sous forme échelonnée

Si $m = 1$ (matrice à une ligne) alors A est déjà échelonnée.

Si $m > 1$, notons j_1 le plus petit indice de colonne non nulle de A. En échangeant deux lignes si nécessaire, on transforme A en une matrice $A^{(1)} = (a^{(1)}_{i,j})_{i,j}$ dont le coefficient $a^{(1)}_{1,j_1}$ est non nul. En additionnant à chaque ligne d'indice $i \geq 2$ la première ligne multipliée par $-\dfrac{a^{(1)}_{i,j_1}}{a^{(1)}_{1,j_1}}$, la matrice $A^{(1)}$ est transformée *soit* en une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a^{(1)}_{1,j_1} & \cdots & \cdots & & \cdots & a^{(1)}_{1,n} \\ & & & & & a'_{2,j_2} & & \cdots & a'_{2,n} \\ & 0 & & 0 & 0 & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ & & & & & a'_{m,j_2} & & \cdots & a'_{m,n} \end{pmatrix}$$

où les termes $a'_{2,j_2}, a'_{3,j_2}, \ldots, a'_{m,j_2}$ ne sont pas tous nuls, *soit* en une matrice dont toutes les lignes d'indice ≥ 2 sont nulles. Dans le deuxième cas, la matrice est échelonnée. Dans le premier cas, le même procédé appliqué aux lignes d'indices $2, \ldots, m$ fournit une matrice $A^{(2)}$, puis une matrice $A^{(3)}$, et ainsi de suite jusqu'à $A^{(m)}$ *ou* jusqu'à ce que la seule ligne non nulle d'une matrice $A^{(r)}$ soit la première. La matrice transformée obtenue est alors de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a^{(1)}_{1,j_1} & \cdots & a^{(1)}_{1,j_2} & \cdots & & & \cdots & a^{(1)}_{1,n} \\ & & & & & a^{(2)}_{2,j_2} & \cdots & & & \cdots & a^{(2)}_{2,n} \\ & & & & & & & \cdots & \cdots & & \\ & & 0 & & & & & & a^{(r)}_{r,j_r} & \cdots & a^{(r)}_{r,n} \\ & & & & & & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donc échelonnée.

Mise sous forme réduite

Les coefficients non nuls $a^{(1)}_{1,j_1}, \ldots, a^{(r)}_{r,j_r}$ sont les pivots de la matrice échelonnée M. On divise chaque ligne non nulle par son pivot, de manière à le rendre égal à 1. Ensuite chaque pivot peut être utilisé pour annuler tous les termes au-dessus de lui dans la colonne dont il fait partie. Par exemple une fois que $a^{(2)}_{2,j_2} = 1$, on annule le terme $a^{(1)}_{1,j_2}$ par l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - a^{(1)}_{1,j_2} L_2$. Après cette suite d'opérations, la matrice obtenue est ainsi échelonnée réduite. C'est la réduite de Gauss $\tilde{A}$ de A.

Conclusion

Cet algorithme prouve l'existence annoncée dans les théorèmes 1.11 et 1.17. Pour l'unicité, voir par exemple l'exercice 1.12.

Complexité

Pour une matrice carrée de taille n, il faut savoir que cet algorithme utilise $O(n^3)$ opérations de type $+, \times, \div$ sur les coefficients (voir par exemple *(Nouvelles) Histoires hédonistes...*).

■ **Exemple 1.18** ✎ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 5 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$. ■

1.4 Applications pratiques

Nous n'en mentionnons que certaines. Il est utile de connaître ces méthodes mais au niveau de l'agrégation, comprendre *pourquoi* elles fonctionnent est tout aussi important.

1.4.1 Résoudre un système linéaire

Proposition 1.19 — Méthode du pivot et résolution d'un système linéaire. Soient A une matrice de $M_{m,n}(K)$ et B un vecteur colonne de $M_{m,1}(K)$. Considérons la matrice augmentée $C = (A \mid B)$ de $M_{m,n+1}(K)$. Sa réduite de Gauss est de la forme $(A' \mid B')$ avec $A' \in M_{m,n}(K)$ et $B' \in M_{m,1}(K)$. Les systèmes linéaires $AX = B$ et $A'X = B'$ sont alors équivalents c'est-à-dire qu'ils ont même ensemble de solutions.

Démonstration. ✎ ■

■ **Remarque 1.20** Il est possible de prouver que, dans la réduite de Gauss de C, le bloc A' est en fait la réduite de Gauss de A. ■

■ **Exemple 1.21** Résoudre $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ (exercice 1.2) ✎ ■

■ **Remarque 1.22** Que donne cette méthode si on opère à la fois sur les lignes et les colonnes ? ✎■

1.4.2 Calculer l'inverse d'une matrice

Proposition 1.23 — Méthode du pivot et inverse d'une matrice. Soit $A \in M_n(K)$. La réduite de Gauss de la matrice augmentée $(A \mid I_n)$ de $M_{n,2n}(K)$ est de la forme $(B \mid C)$ avec B et C dans $M_n(K)$. Alors la matrice A est inversible si et seulement si $B = I_n$ et dans ce cas, on a $C = A^{-1}$.

Démonstration. ✎ ■

■ **Remarque 1.24** Que donne cette méthode si on opère à la fois sur les lignes et les colonnes ? ✎■

■ **Exemple 1.25** Calculer A^{-1} où $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$ (exercice 1.3). ■

1.4.3 Dire si une famille est libre ou liée, en extraire une base, calculer son rang

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E et notons A la matrice dont la i-ème colonne est formée des coordonnées de u_i dans la base $\mathcal{B}$, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. D'après le théorème 1.11 et la proposition 1.9, nous savons que les colonnes de A et de sa réduite de Gauss $\tilde{A}$ ont mêmes relations de liaison. Nous pouvons ainsi déterminer si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre ou liée, et si elle est liée en extraire une base et calculer son rang.

■ **Exemple 1.26** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 5 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ étudiée à l'exemple 1.18, dont la réduite de Gauss est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ✎ ■

1.4.4 Compléter une famille libre en une base, déterminer un supplémentaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E *supposée libre*. On cherche à mettre en œuvre le théorème de la base incomplète c'est-à-dire à trouver des vecteurs $u_{p+1}, \dots, u_n$ de E tels que $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ soit une base de E.

Pour cela, on peut essayer d'adjoindre des vecteurs de la base $\mathcal{B}$. On construit la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $u_1, \dots, u_p, e_1, \dots, e_n$ dans la base $\mathcal{B}$. La position des pivots dans sa réduite de Gauss nous dira quels vecteurs choisir parmi $e_1, \dots, e_n$ afin qu'adjoints à $u_1, \dots, u_p$ ils forment une base de E.

■ **Exemple 1.27** Si E est de dimension 4, compléter la famille (u_1, u_2) donnée par $u_1 = e_1 + e_2 + 2e_3$ et $u_2 = e_3$ en une base de E. Donner un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ dans E. ✎ ■

1.4.5 Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F. Notons A la matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Puisque la matrice A et sa réduite de Gauss $\tilde{A}$ ont même rang et mêmes relations de liaison entre leurs colonnes, cela permet de déterminer le rang de f, une base de $\mathrm{Im}\, f$ et une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

■ **Exemple 1.28** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 7 muni d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_7)$ et F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 muni d'une base $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_4)$. Soit $f : E \to F$ l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{llll} f(e_1) = 0, & f(e_2) = f_1, & f(e_3) = -f_1, & f(e_4) = f_2, \\ f(e_5) = f_3, & f(e_6) = f_1 + 2f_2 + 3f_3, & f(e_7) = 4f_1 + 5f_2 + 6f_3. & \end{array}$$

✎ ■

1.4.6 Déterminer une somme et une intersection de sous-espaces vectoriels

Soient E un espace vectoriel et deux sous-espaces vectoriels F et G. On suppose que $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m)$ et on souhaite déterminer des bases de $F + G$ et $F \cap G$.

On sait que $F + G = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_m)$. Le problème se ramène donc à extraire une famille libre de $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_m)$.

Par ailleurs, les relations de liaison lisibles sur la réduite de Gauss fournissent des vecteurs de $F \cap G$, ce qui peut aider à trouver une base de $F \cap G$.

■ **Exemple 1.29** Soient $F = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ et $G = \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ dans K^4 où :

$$u_1 = (1,2,3,4), \quad u_2 = (0,1,1,0), \quad u_3 = (1,1,2,1), v_1 = (2,3,3,2), \quad v_2 = (1,2,1,1).$$

(exercice 1.7) ✎ ■

1.5 Applications théoriques

Théorème 1.30 — Gauss–Jordan. Soit $A \in M_{m,n}(K)$ une matrice de rang r. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ tels que $PAQ^{-1} = J_{m,n,r}$ où $J_{m,n,r}$ est la matrice définie par :

$$J_{m,n,r} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad r \quad & \quad n-r \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ \\ m-r \end{array} & \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} \ddots & \\ & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

(si $r = 0$, la matrice $J_{m,n,r}$ est nulle).

Démonstration. Nous pouvons donner deux démonstrations :

— à partir de la réduite de Gauss de A : ✎

— en raisonnant sur une application linéaire dont A est la matrice dans une base : voir l'exercice 1.9. ■

Corollaire 1.31 Deux matrices de $M_{m,n}(K)$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Démonstration. ✎ ■

Pour l'action de $\mathrm{GL}_m(K) \times \mathrm{GL}_n(K)$ sur $M_{m,n}(K)$ donnée par $(P,Q) \star A = PAQ^{-1}$ (équivalence matricielle), le rang est donc un invariant total et les matrices $(J_{m,n,r})_{0 \leq r \leq \min(m,n)}$ sont des formes normales des orbites.

■ **Remarque 1.32** Retrouver le théorème du rang à partir de Gauss–Jordan ✎ ■

■ **Remarque 1.33** Démontrer $\mathrm{rg}\,{}^tA = \mathrm{rg}\,A$ à partir de Gauss–Jordan ✎ ■

Si $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, la méthode du pivot dit qu'il existe $P_1, \ldots, P_k$ matrices élémentaires telles que $P_k \cdots P_1 A = I_n$, donc $A = P_1^{-1} \cdots P_k^{-1}$. On en déduit immédiatement que le groupe $\mathrm{GL}_n(K)$ engendré par les matrices élémentaires. En fait il est possible de faire mieux.

Théorème 1.34 — Générateurs des groupes $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{SL}_n(K)$.

1) Le groupe $\mathrm{SL}_n(K)$ est engendré par les matrices de transvection.
2) Le groupe $\mathrm{GL}_n(K)$ est engendré par les matrices de transvection et les matrices de dilatation.

Démonstration. ✎ ■

■ **Remarque 1.35** La méthode du pivot et les matrices échelonnées réduites admettent un prolongement naturel dans le cadre des $\mathbb{Z}$-modules, et plus généralement des modules sur un anneau principal : il s'agit de la *forme normale de Smith* à partir de laquelle on peut obtenir le théorème de la base adaptée. Rappelons son énoncé (voir par exemple *Objectif Agrégation* de Beck–Malick–Peyré).

Proposition 1.36 — Forme normale de Smith. Soit R un anneau principal et soit $A \in M_{m,n}(R)$. Il existe un entier naturel s, des éléments $d_1, \dots, d_s$ non nuls de R vérifiant $d_s \mid \cdots \mid d_1$ et des matrices $(P, Q) \in \mathrm{GL}_m(R) \times \mathrm{GL}_n(R)$ telles que :

$$PAQ = \begin{array}{r} \\ s\left\{\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right. \\ m-s\left\{\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right. \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{d_1 \quad \ddots \quad d_s}}^{s} \; \overbrace{\hphantom{0 \quad \ddots \quad 0}}^{n-s} \\ \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & d_s & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

De plus la famille $d_1, \dots, d_s$ est unique à multiplication près par des inversibles de R, et appelée la *famille des facteurs invariants de la matrice A*.

■

1.6 Exercices

Exercice 1.1 — Reconnaître des matrices échelonnées réduites. Les matrices suivantes à coefficients dans $\mathbb{R}$ sont-elles échelonnées réduites selon les lignes ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les exercices suivants sont à résoudre par la méthode du pivot.

Exercice 1.2 — Résoudre un système linéaire. En utilisant la matrice échelonnée réduite de $(A\,|\,B)$, résoudre les systèmes linéaires $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$3)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.3 — Calculer un inverse. Calculer A^{-1} où $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$.

Exercice 1.4 — Dire si une famille est libre ou liée, en extraire une base, calculer son rang. Posons $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{R})$. Dire si la famille (M_1, M_2, M_3, M_4) est libre ou liée, préciser son rang, et si elle est liée en extraire une base et donner toutes les relations de liaison au sein de cette famille.

Exercice 1.5 — Compléter une famille en une base, déterminer un supplémentaire.
1) Compléter la famille $(v_1 = (2,0,1), v_2 = (-1,1,3))$ en une base de K^3.
2) Déterminer un supplémentaire de $F = \mathrm{Vect}(1, X^2+2, X^2+X+1)$ dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 1.6 — Étudier une application linéaire. Soient E (resp. F) un K-espace vectoriel de dimension 6 (resp. 4) muni d'une base $(u_1, \ldots, u_6)$ (resp. $(v_1, \ldots, v_4)$). Soit $f : E \to F$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases $(u_1, \ldots, u_6)$ et $(v_1, \ldots, v_4)$ est :

$$\begin{pmatrix} -3 & 9 & -2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 8 & -24 & 4 & -12 & -4 & -8 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Déterminer :
1) le rang de f ;
2) une base de $\mathrm{Im}\, f$, et exprimer les vecteurs $f(u_1), \ldots, f(u_6)$ dans cette base ;
3) une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

Exercice 1.7 — Déterminer une somme et une intersection de sous-espaces vectoriels.
Déterminer une base de $F+G$ et de $F\cap G$ dans K^4 dans les cas suivants :

1) $F=\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)$ et $G=\mathrm{Vect}(w_1,w_2)$ avec $v_1=(1,2,3,4)$, $v_2=(0,1,1,0)$, $v_3=(1,1,2,1)$, $w_1=(2,3,3,2)$, $w_2=(1,2,1,1)$.
2) $F=\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)$ et $G=\mathrm{Vect}(w_1,w_2,w_3)$ avec $v_1=(1,0,0,0)$, $v_2=(0,1,0,0)$, $v_3=(0,0,1,0)$, $w_1=(0,0,0,1)$, $w_2=(1,1,-1,1)$, $w_3=(1,2,0,1)$.

Exercice 1.8 — $\mathrm{SL}_n(K)$ engendré en pratique les transvections. Soit $M=\begin{pmatrix}2&3\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$.

1) Écrire M comme produit de matrices de transvections.
2) (Avec davantage de calculs) Même question pour la matrice de l'exercice 1.3.

Les exercices suivants portent sur des aspects théoriques du chapitre.

Exercice 1.9 — Théorème de Gauss–Jordan. *(Classique)* Démontrer le théorème 1.30 en raisonnant sur une application linéaire dont A est la matrice dans une base.

Exercice 1.10 — Multiplication à gauche par une matrice inversible et noyau. (*Instructif*)
Soient A et A' dans $M_{m,n}(K)$. Montrer que :

$$\exists P\in\mathrm{GL}_m(K)\ \ A'=PA \iff \mathrm{Ker}\,A'=\mathrm{Ker}\,A.$$

$\triangleright$ Pour $\Leftarrow$, écrire l'énoncé équivalent en termes d'applications linéaires f et f'. Pour le démontrer, considérer un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,f$, une base $(v_1,\ldots,v_r)$ de ce sous-espace puis les images par f et f' de $(v_1,\ldots,v_r)$.

Exercice 1.11 — Topologie de certains espaces de matrices. *(Classique)*

1) Pour $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, montrer que l'ensemble $\mathrm{SL}_n(K)$ est connexe par arcs.
2) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
3) L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il connexe ?
4) Montrer que les ensembles $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})=\{M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\det M>0\}$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})=\{M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\det M<0\}$ sont connexes par arcs.

Exercice 1.12 — Unicité de l'échelonnée réduite. *(Complément)*
Soient A et B deux matrices échelonnées réduites de $M_{m,n}(K)$. On suppose qu'il existe $P\in\mathrm{GL}_m(K)$ telle que $B=PA$. Montrer que $B=A$.
$\triangleright$ Raisonner par récurrence sur le nombre n de colonnes. Si A et B sont dans $M_{m,n+1}(K)$, les décomposer en $(A'\mid A_{n+1})$ et $(B'\mid B_{n+1})$ où A_{n+1},B_{n+1} sont leur dernière colonne. Commencer par montrer que $B'=A'$.

Exercice 1.13 — Stabilisateur d'une matrice échelonnée réduite. *(Complément)*
Soit $M\in M_{m,n}(K)$ une matrice échelonnée réduite. On note r son rang. Montrer que le stabilisateur de M pour l'action par multiplication à gauche par $\mathrm{GL}_m(K)$ est l'ensemble des matrices de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & A_{r,n-r}\\ \hline 0_{m-r,r} & B_{m-r,m-r}\end{array}\right)\qquad \text{où } A_{r,n-r}\in M_{r,n-r}(K), B\in\mathrm{GL}_{m-r,m-r}(K).$$

2. Dualité en algèbre linéaire

Révisions personnelles : cf. chapitre 1.
Au programme du concours de l'agrégation : paragraphes 1.1.a, 1.2.a, 1.2.b, 1.2.c.

Références possibles pour la dualité traitée d'un point de vue agrégatif :
— J. Grifone, *Algèbre linéaire*, Cépaduès,
— J.-É. Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre & Géométrie*, De Boeck,
— J.-M. Arnaudiès et H. Fraysse, *Cours de mathématiques - 1 Algèbre*, Dunod,
— E. Ramis, Cl. Deschamps, J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales - 1 Algèbre*, Masson.

2.1 Espace dual

Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K.

2.1.1 Définitions

Définition 2.1 — Forme linéaire. Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E dans K.

■ **Exemple 2.2** ✎ ■

Remarque. Matrice d'une forme linéaire dans une base. ✎

Définition 2.3 — Espace vectoriel dual. L'ensemble des formes linéaires sur E est noté E^* : $E^* = \mathcal{L}(E,K)$. C'est un espace vectoriel sur K appelé le **dual** de E.

■ **Exemple 2.4** ✎ ■

Proposition 2.5 — Dimension du dual. Si E est de dimension finie alors E^* est de dimension finie et $\dim E^* = \dim E$.

Démonstration. ✎ ■

2.1.2 Base duale

Dans l'énoncé suivant, c'est surtout le cas de la dimension finie qui nous sera utile.

Théorème 2.6 — Base duale. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. La famille $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{i\in I}$ des formes coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est libre dans E^*. C'est une base de E^* si et seulement si E est dimension finie. Dans ce cas, $\mathcal{B}^*$ est appelée la **base duale de** $\mathcal{B}$.

Démonstration. ✎ ∎

▪ **Exemple 2.7** Base duale de $(1, X, \dots, X^n)$ dans $K_n[X]$. ✎ ▪

Proposition 2.8 — Coordonnées d'un vecteur à l'aide de la base duale. Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$. Pour tout $x \in E$, on a :

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i.$$

Démonstration. ✎ ∎

Remarque. Généralisation de la formule classique $x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i$ pour tous vecteur x d'un espace euclidien $(E, (\cdot,\cdot))$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

Remarque. Formule duale pour l'expression de $f \in E^*$ dans la base $\mathcal{B}^*$. ✎

▪ **Exemple 2.9** Formule de Taylor-Lagrange polynomiale. ✎ ▪

Remarque. Si E est de dimension quelconque et $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E, l'application linéaire $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ e_i & \longmapsto & e_i^* \end{array}$ est injective. Si E est de dimension finie, c'est un isomorphisme *non canonique* entre E et son dual E^*. ✎

2.1.3 Bidual

Puisque E^* est à nouveau un espace vectoriel, nous pouvons répéter la construction et s'intéresser à $(E^*)^*$ c'est-à-dire aux formes linéaires sur E^*.

Définition 2.10 — Crochet de dualité. Pour $f \in E^*$ et $x \in E$, on note $\langle f, x\rangle = f(x)$.

Réécriture de la formule de la proposition 2.8 ✎

Proposition 2.11 — Propriétés du crochet. Soit E un espace vectoriel sur K.

1) Pour tout $x \in E$, l'application :

$$\begin{array}{cccc} \langle \cdot, x\rangle : & E^* & \longrightarrow & K \\ & f & \longmapsto & \langle f, x\rangle \end{array}$$

est une forme linéaire sur E^*.

Pour tout $f \in E^*$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \langle f, \cdot \rangle : & E & \longrightarrow & K \\ & x & \longmapsto & \langle f, x \rangle \end{array}$$

est une forme linéaire sur E.

2) Soit $f \in E^*$. On a : $f = 0 \iff \langle f, \cdot \rangle = 0$.
Soit $x \in E$. On a : $x = 0 \iff \langle \cdot, x \rangle = 0$.

Démonstration. ✎ ■

Définition 2.12 — Bidual. Le **bidual** d'un espace vectoriel E est l'espace vectoriel $(E^*)^*$, aussi noté E^{**}.

✎ Dimension du bidual :

Théorème 2.13 — Isomorphisme canonique entre E et E^{**}. Soit E un espace vectoriel. L'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} I : & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & \langle \cdot, x \rangle \end{array}$$

est injective. Si E est de dimension finie, c'est un isomorphisme *canonique* entre E et son bidual E^{**}.

Démonstration. ✎ ■

En dimension finie, on en déduit que le procédé de construction de la base duale admet un procédé inverse.

Proposition 2.14 — Base antéduale. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de son dual E^*. Alors il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E dont $(f_1, \dots, f_n)$ est la base duale. On l'appelle la **base antéduale** de $(f_1, \dots, f_n)$.

Démonstration. ✎ ■

2.2 Orthogonalité au sens de la dualité

Il existe plusieurs notions d'orthogonal en algèbre et en géométrie. Nous étudions ici les orthogonalités associées à la dualité. Elles éclairent le lien entre les deux descriptions possibles d'un sous-espace vectoriel de dimension finie, par une base ou par un système d'équations. La notion d'orthogonalité pour un produit scalaire (ou une forme bilinéaire) en sera vue comme un cas particulier.

2.2.1 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition 2.15 — Orthogonaux dans E et dans E^*. Soit F un sous-espace vectoriel de E. L'**orthogonal de F** dans E^* est l'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur F c'est-à-dire :

$$F^\perp = \{f \in E^* \mid \forall x \in F, f(x) = 0\}.$$

Soit G un sous-espace vectoriel de E^*. L'**orthogonal de G** dans E est :

$$G^0 = \{x \in E \mid \forall f \in G, f(x) = 0\} = \bigcap_{f \in G} \operatorname{Ker} f.$$

✐

Exemple 2.16 ✐

1) Orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par une forme linéaire
2)

■

Proposition 2.17 — Premières propriétés des orthogonaux. Avec les notations de la définition précédente :

1) $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E^* ; G^0 est un sous-espace vectoriel de E.
2) Si $F = \mathrm{Vect}(A)$ est engendré par une partie A de E alors $F^\perp = \{f \in E^* \mid \forall x \in A,\, f(x) = 0\}$.
   Si $G = \mathrm{Vect}(B)$ est engendré par une partie B de E^* alors $G^0 = \{x \in E \mid \forall f \in B,\, f(x) = 0\}$.
3) $\{0_E\}^\perp = E^*$, $E^\perp = \{0_{E^*}\}$; $\{0_{E^*}\}^0 = E$, $(E^*)^0 = \{0_E\}$.

Démonstration. ✐ ■

Le résultat suivant explique le lien entre les deux orthogonaux au sens de la dualité. Il peut être utile pour déduire des résultats sur les orthogonaux dans E à partir de ceux pour les orthogonaux dans E^*, et réciproquement.

Lemme 2.18 — Lien entre les deux orthogonaux au sens de la dualité. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit G un sous-espace vectoriel de E^*. Alors on a $I(G^0) = G^\perp$ où $I : E \to E^{**}$ est l'isomorphisme du théorème 2.13.

Démonstration. ✐ ■

Nous mettons maintenant en lumière un autre lien, celui entre l'orthogonal au sens de la dualité et l'orthogonal pour un produit scalaire. Ce résultat sera généralisé dans le chapitre 3 aux formes bilinéaires non dégénérées.

Lemme 2.19 — Lien entre orthogonal au sens de la dualité et orthogonal pour un produit scalaire. Soit $(E,(\cdot,\cdot))$ un espace vectoriel *euclidien*.

1) L'application linéaire :
$$\begin{array}{rccc} i: & E & \longrightarrow & E^* \\ & x & \longmapsto & (\cdot,x) \end{array}$$
   est un isomorphisme *canonique* entre E et E^*.
2) Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^{\perp \mathrm{ps}}$ son orthogonal pour le produit scalaire : $F^{\perp \mathrm{ps}} = \{x \in E \mid \forall y \in F,\, (x,y) = 0\}$. Alors on a $i(F^{\perp \mathrm{ps}}) = F^\perp$.

Démonstration. ✐ ■

Le résultat suivant sur les orthogonaux est essentiel.

Théorème 2.20 — Dimension de l'orthogonal, double-orthogonal. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E, G un sous-espace vectoriel de E^*. Alors on a :

1) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E = \dim G + \dim G^0$;
2) $(F^\perp)^0 = F$ et $(G^0)^\perp = G$.

Remarque. L'égalité $(F^{\perp})^0 = F$ et l'inclusion $G \subset (G^0)^{\perp}$ sont vraies même si l'espace vectoriel E n'est pas supposé de dimension finie.

Pour démontrer la proposition, nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 2.21 — Base de l'orthogonal. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E muni d'une base $(v_1, \dots, v_r)$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe une base de E de la forme $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$. Soit $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ sa base duale. Alors la famille $(v_{r+1}^*, \dots, v_n^*)$ est une base de $F^{\perp}$.

Démonstration. Voir l'exercice 2.3. ■

Démonstration du théorème 2.20. ✐ ■

Théorème 2.22 — Orthogonal, somme et intersection. Soient F_1, F_2 des sous-espaces vectoriels de E et G_1, G_2 des sous-espaces vectoriels de E^*. Alors :

1) $(F_1 + F_2)^{\perp} = F_1^{\perp} \cap F_2^{\perp}$;
2) $(F_1 \cap F_2)^{\perp} = F_1^{\perp} + F_2^{\perp}$;
3) $(G_1 + G_2)^0 = G_1^0 \cap G_2^0$;
4) $(G_1 \cap G_2)^0 \supset G_1^0 + G_2^0$; si E est de dimension finie, cette dernière inclusion est une égalité.

Principe ✐

Démonstration. ✐ ■

2.2.2 Hyperplans

Définition 2.23 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Un **hyperplan** de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Proposition 2.24 — Équation d'un hyperplan. Soit F un sous-espace vectoriel de E, espace vectoriel de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) F est un hyperplan de E ;
2) $\dim F^{\perp} = 1$;
3) il existe $f \in E^*$, $f \neq 0$ tel que $F = \operatorname{Ker} f$.

Dans ce cas, l'équation $f(x) = 0$ est appelée une **équation de l'hyperplan** F.

Démonstration. ✐ ■

Remarque. Cette équation n'est pas unique.

2.2.3 Système d'équations d'un sous-espace vectoriel

En dimension finie, tout hyperplan peut être représenté par une équation. De manière générale, tout sous-espace vectoriel peut être représenté par un système d'équations : c'est ce qu'affirme le théorème suivant, qui lève aussi le voile sur le nombre et l'origine de ces équations.

✐

Théorème 2.25 — Système d'équations d'un sous-espace vectoriel. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension r de E et soit $(f_1,\dots,f_{n-r})$ une base de $F^\perp$. Alors on a :

$$F = \{x \in E \mid f_1(x) = 0,\dots,f_{n-r}(x) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{n-r} \operatorname{Ker} f_i.$$

Autrement dit le sous-espace vectoriel F est l'intersection de $n-r$ hyperplans de E.

Démonstration. ✐ ■

Remarque. ✐

— Nombre d'équations cartésiennes + nombre de paramètres (dim. du sev) = dim. de l'esp. vect.

— Minimalité du nombre $n-r$ d'équations.

■ **Exemple 2.26** Calcul en pratique d'un système d'équations de F et d'une base de $F^\perp$ par la méthode du pivot : voir l'exercice 2.7. ■

2.3 Transposée

2.3.1 Application transposée

Définition 2.27 — Application transposée. Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux K-espaces vectoriels E et F. La **transposée** de u est l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} {}^t u : & F^* & \longrightarrow & E^* \\ & f & \longmapsto & f \circ u. \end{array}$$

Diagramme. ✐

Remarque. L'application transposée satisfait une propriété d'apparence similaire à celle de l'adjoint dans un espace euclidien, vis-à-vis du crochet de dualité au lieu du produit scalaire :

$$\forall x \in E, \forall f \in E^*, \quad \langle f, u(x)\rangle = \langle {}^t u(f), x\rangle.$$

Poursuivons cette comparaison avec l'adjoint dans le cadre euclidien. Soit $(E,(\cdot,\cdot))$ un espace vectoriel *euclidien* et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. En notant $u^* \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme adjoint de u et $i : E \to E^*$ l'isomorphisme du lemme 2.19, alors on a :

$$u^* = i^{-1} \circ {}^t u \circ i.$$

✐

Proposition 2.28 — Propriétés de l'application transposée. Soient E,F,G des espaces vectoriels sur K, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :

1) ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$;
2) ${}^t \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_{E^*}$;
3) si u est un isomorphisme, il en est de même de ${}^t u$ et alors $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$;
4) $(\operatorname{Ker} u)^\perp = \operatorname{Im}({}^t u)$ et $(\operatorname{Im} u)^\perp = \operatorname{Ker}({}^t u)$;
5) si E est de dimension finie alors $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}({}^t u)$.

Démonstration. ✐ ■

Proposition 2.29 — Transposée et sous-espaces stables. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est stable par u si et seulement si $F^{\perp}$ est stable par ${}^t u$.

Démonstration. Voir l'exercice 2.8. ∎

Une application à la détermination des sous-espaces stables d'un endomorphisme en petite dimension sera vue dans l'exercice 2.8.

2.3.2 Écriture matricielle

Proposition 2.30 — Matrice de l'application transposée dans les bases duales. Soient :

- E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}_E$ et de sa base duale $\mathcal{B}_E^*$;
- F un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}_F$ et de sa base duale $\mathcal{B}_F^*$;
- $u \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire.

La matrice de l'application transposée ${}^t u$ dans les bases duales $\mathcal{B}_F^*$ et $\mathcal{B}_E^*$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F^*,\mathcal{B}_E^*}({}^t u) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$$

Démonstration. ∎

Remarque. Avec la proposition 2.28, nous retrouvons ainsi les propriétés usuelles de la transposée d'une matrice, en particulier la formule $\mathrm{rg}\,{}^t A = \mathrm{rg}\,A$.

Proposition 2.31 — Matrice de passage entre bases duales. Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni de bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, dont les bases duales sont notées $\mathcal{B}_1^*$ et $\mathcal{B}_2^*$. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}_1^*$ à $\mathcal{B}_2^*$ est ${}^t(P^{-1})$ $(= ({}^t P)^{-1})$.

Démonstration. ∎

Une application à la détermination d'une base duale dans $(K^n)^*$ sera vue dans l'exercice 2.6.

Remarque. Matrice de passage entre bases antéduales.

2.4 Espace vectoriel quotient – illustration en dualité

2.4.1 Construction et propriétés

Soient E un espace vectoriel sur K et F un sous-espace vectoriel de E. On rappelle que $(F,+)$ est un sous-groupe de $(E,+)$, qui est abélien. On peut donc considérer le groupe quotient $(E/F,+)$. Pour x et y dans E, on a $x \sim y$ dans E/F si et seulement si $x - y \in F$. La classe dans E/F d'un vecteur $x \in E$ est $x+F$ et elle est notée $\overline{x}$. La loi $+$ sur E/F est alors définie par :

$$\forall \overline{x} \in E/F,\ \forall \overline{y} \in E/F, \quad \overline{x}+\overline{y} = \overline{x+y}.$$

On munit aussi l'ensemble quotient E/F de la loi externe définie par :

$$\forall \lambda \in K,\ \forall \overline{x} \in E/F, \quad \lambda \cdot \overline{x} = \overline{\lambda x}.$$

Théorème 2.32 — Espace vectoriel quotient. Muni de ces lois $+$ et $\cdot$, l'ensemble E/F est un espace vectoriel sur K. Il est appelé l'**espace vectoriel quotient de E par F**. De plus l'application :

$$\begin{array}{rccc} \pi : & E & \longrightarrow & E/F \\ & x & \longmapsto & \overline{x} \end{array}$$

est linéaire, surjective et de noyau F.

Remarque. L'ensemble $\overline{x} = x + F$ n'est pas un sous-espace vectoriel (sauf si $x = 0$) mais un espace affine, de direction F.

Théorème 2.33 — Théorème de factorisation, supplémentaire, dimension du quotient. Soient E un espace vectoriel sur K et F un sous-espace vectoriel de E.

1) Soit $u : E \to G$ une application linéaire de E dans un espace vectoriel G. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si $F \subset \operatorname{Ker} u$, il existe une unique application $\overline{u} : E/F \to G$ telle que $\overline{u} \circ \pi = u$ c'est-à-dire, pour tout $x \in E$, $\overline{u}(\overline{x}) = u(x)$. Cette application $\overline{u}$ est linéaire.
Cas particulier $(F = \operatorname{Ker} u)$: l'application $\overline{u} : E/\operatorname{Ker} u \to G$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $E/\operatorname{Ker} u \simeq \operatorname{Im} u$.
2) Tout supplémentaire de F dans E est isomorphe à E/F.
3) Si E est de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E alors l'espace vectoriel E/F est de dimension finie et :

$$\dim(E/F) = \dim E - \dim F.$$

Démonstration. ✎
Pour 2), considérer un supplémentaire S de F dans E et factoriser la projection $p : E \to S$.
Pour 3), utiliser le fait que $\dim S = \dim E - \dim F$. ■

Remarque.

1) En combinant l'isomorphisme $E/\operatorname{Ker} u \simeq \operatorname{Im} u$ de 1) et le point 3), on retrouve le théorème du rang.
2) Le point 2) explique que l'espace vectoriel quotient E/F peut se substituer au choix d'un supplémentaire de F dans E dans certains raisonnements (on rappelle que F possède une infinité de supplémentaires et qu'il n'en existe pas de canonique).
3) De manière générale, si l'espace vectoriel E/F est de dimension finie on dit alors que **F est de codimension finie** dans E et la **codimension de F** est $\dim(E/F)$ (si E est de dimension finie, c'est aussi $\dim E - \dim F$). Certains résultats d'algèbre linéaire peuvent s'étendre du cas de dimension finie au cas de codimension finie. Enfin de manière générale, un **hyperplan** d'un espace vectoriel E est défini comme un sous-espace vectoriel de E de codimension 1.

2.4.2 Dual du quotient et orthogonal

Le point 3) du théorème précédent, combiné au théorème 2.20, donne $\dim(E/F) = \dim F^{\perp}$ en dimension finie. Le résultat suivant explique que c'est davantage qu'une coïncidence numérique.

Proposition 2.34 — Dual du quotient et orthogonal. Soit F un sous-espace vectoriel de E. L'application :

$$\begin{array}{ccc} F^{\perp} & \longrightarrow & (E/F)^* \\ f & \longmapsto & \overline{f} \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. Voir l'exercice 2.13. ■

2.5 Exercices

Exercice 2.1 — Dual en dimension infinie. *(Complément)*

1) Soient E un K-espace vectoriel de dimension infinie et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Montrer que la famille $(e_i^*)_{i\in I}$ des formes coordonnées n'engendre pas E^*.
2) Soient $K^{\mathbb{N}}$ le K-espace vectoriel des suites à valeurs dans K et $K^{(\mathbb{N})}$ le sous-espace vectoriel des suites nulles à partir d'un certain rang. Montrer que $(K^{(\mathbb{N})})^*$ est isomorphe à $K^{\mathbb{N}}$.

Exercice 2.2 — Interpolation lagrangienne. *(Classique)* Énoncer la formule d'interpolation de Lagrange. L'interpréter puis la démontrer à l'aide de la dualité.

Exercice 2.3 — Base de l'orthogonal. Dans un espace vectoriel E de dimension finie n, on considère un sous-espace vectoriel F de E muni d'une base $(v_1,\dots,v_r)$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe une base de E de la forme $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_r,v_{r+1},\dots,v_n)$. Soit $\mathcal{B}^*=(v_1^*,\dots,v_n^*)$ sa base duale. Montrer que la famille $(v_{r+1}^*,\dots,v_n^*)$ est une base de $F^\perp$.

Exercice 2.4 — Propriétés de l'orthogonal. Soient E un K-espace vectoriel de dimension quelconque et F,F_1,F_2 des sous-espaces vectoriels de E.

1) Montrer que $(F_1+F_2)^\perp = F_1^\perp\cap F_2^\perp$.
2) Montrer que $(F_1\cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$.
   ▷ Traiter d'abord le cas où E est de dimension finie puis chercher une preuve valable en toute dimension.

Exercice 2.5 — Combinaison de formes linéaires. *(Classique)* Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f_1,\dots,f_k,f$ des formes linéaires sur E. Montrer que :

$$f\in \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_k) \iff \bigcap_{i=1}^{k}\mathrm{Ker}\, f_i \subset \mathrm{Ker}\, f.$$

Exercice 2.6 — Bases duales et antéduales. *(À connaître)*

1) Soient les vecteurs $u_1=(1,-1,1)$, $u_2=(1,0,1)$, $u_3=(0,2,-1)$ de K^3. Déterminer la base duale de (u_1,u_2,u_3) en fonction des formes coordonnées (e_1^*,e_2^*,e_3^*) où (e_1,e_2,e_3) désigne la base canonique de K^3.
2) Pour a et b distincts dans K, montrer que les formes linéaires $P\mapsto P(a)$, $P\mapsto P'(a)$, $P\mapsto P(b)$, $P\mapsto P'(b)$ constituent une base de $(K_3[X])^*$ et calculer sa base antéduale.

Exercice 2.7 — Système d'équations, orthogonal. *(À connaître)*

Pour chaque sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$, donner un système d'équations de F et une base de $F^\perp$:

1) $F=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ où $v_1=(1,1,1,1)$ et $v_2=(-1,1,-2,2)$;
2) $F=\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)$ où $v_1=(1,2,3,4)$, $v_2=(1,-1,1,0)$ et $v_3=(0,1,1,0)$.

Exercice 2.8 — Sous-espaces stables. *(À connaître)* Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

1) Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.
2) On suppose E de dimension 3 et muni d'une base (v_1,v_2,v_3). Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ défini par $u(v_1)=v_2$, $u(v_2)=v_1$, $u(v_3)=v_1+v_2+v_3$. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de E stables par u.

Exercice 2.9 — Multiplication à droite par $\mathrm{GL}_n(K)$**.** *(En lien avec le chapitre 1)*
Dans l'exercice 1.10, nous avons vu que pour toutes matrices A et A' dans $M_{m,n}(K)$ on a : $\exists P \in \mathrm{GL}_m(K)\ \ A' = PA \iff \mathrm{Ker} A' = \mathrm{Ker} A$. En déduire que, pour toutes matrices A et A' dans $M_{m,n}(K)$ on a :

$$\exists Q \in \mathrm{GL}_n(K)\ \ A' = AQ \iff \mathrm{Im} A' = \mathrm{Im} A.$$

Exercice 2.10 — Formes linéaires de $M_n(K)$**.** *(Classique)*
1) Montrer que pour toute forme linéaire $f \in M_n(K)^*$, il existe une unique matrice $A \in M_n(K)$ telle que pour tout $M \in M_n(K)$, $f(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.
2) En déduire que les formes linéaires $f \in M_n(K)^*$ vérifiant, pour tout $(M,N) \in M_n(K)^2$, $f(MN) = f(NM)$, sont les $\lambda\,\mathrm{Tr}$ pour $\lambda \in K$.

Exercice 2.11 — Double transposée d'un endomorphisme. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. On note $I : E \to E^{**}$ l'isomorphisme canonique du théorème 2.13.
1) Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Montrer que $I(\mathcal{B})$ est la base $\mathcal{B}^{**}$, duale de $\mathcal{B}^*$.
2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que ${}^t({}^t u) = I \circ u \circ I^{-1}$.
3) Retrouver la propriété suivante (!) : pour toute matrice $M \in M_n(K)$, on a ${}^t({}^t M) = M$.

Les derniers exercices portent sur la notion d'espace vectoriel quotient.

Exercice 2.12 — Noyau et composition avec un isomorphisme. Soient f et f' deux applications linéaires de E dans F telles que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f'$. En appliquant le théorème de factorisation à f et f', démontrer qu'il existe un isomorphisme $\varphi : F \to F$ tel que $f' = \varphi \circ f$.
(L'exercice 1.10 en donnait une autre démonstration).

Exercice 2.13 — Dual du quotient et orthogonal. Soient E un espace vectoriel sur K et F un sous-espace vectoriel de E.
1) Soit $f \in F^{\perp}$. Justifier l'existence de $\overline{f} : E/F \to K$ et le fait que $\overline{f} \in (E/F)^*$.
2) Montrer la linéarité de l'application :

$$u : \begin{array}{ccc} F^{\perp} & \longrightarrow & (E/F)^* \\ f & \longmapsto & \overline{f}. \end{array}$$

3) Montrer que u est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. Formes quadratiques

Révisions personnelles : algèbre bilinéaire, espaces euclidiens et hermitiens.
Au programme du concours de l'agrégation : paragraphes 4.a, 4.b, 4.c, 4.d, 4.e.

Références possibles (de généralistes à spécialisées sur ce thème) :
— J.-É. Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre & Géométrie*, De Boeck,
— J. Grifone, *Algèbre linéaire*, Cépaduès,
— Ph. Caldero et J. Germoni, *(Nouvelles) Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, tome 1*, Calvage & Mounet,
— J.-D. Eiden, *Espaces vectoriels euclidiens*, Calvage & Mounet,
— Cl. de Seguins Pazzis, *Invitation aux formes quadratiques*, Calvage & Mounet,
— A. Debreil, J.-D. Eiden, R. Mneimné, T.-H. Nguyen, *Formes quadratiques et géométrie*, Calvage & Mounet.

3.1 Généralités sur les formes quadratiques

Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K. On suppose que E est de *dimension finie* notée n, même si certaines définitions seront valables en dimension quelconque. On supposera aussi assez rapidement que K est de caractéristique $\neq 2$.

3.1.1 Rappels sur les formes bilinéaires

Définition 3.1 — Forme bilinéaire. Une **forme bilinéaire** sur E est une application $\varphi : E \times E \to K$ telle que, pour tout $x \in E$, $\varphi(x, \cdot) : E \to K$ est linéaire et pour tout $y \in E$, $\varphi(\cdot, y) : E \to K$ est linéaire. L'ensemble des formes bilinéaires sur E est noté $\mathcal{L}_2(E)$.

■ **Exemple 3.2**
$f_1 \otimes f_2 : E \times E \to K$, $(x,y) \mapsto f_1(x) f_2(y)$ où $f_1 \in E^*$ et $f_2 \in E^*$. ■

Proposition 3.3 — Expression en fonction des coordonnées dans une base. Soit φ une forme bilinéaire sur E. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Pour tous vecteurs $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ et $y=\sum_{i=1}^n y_ie_i$ de E décomposés dans cette base, on a :

$$\varphi(x,y)=\sum_{i,j=1}^n \varphi(e_i,e_j)x_iy_j.$$

Démonstration. ✎ ■

Proposition 3.4 — L'espace vectoriel des formes bilinéaires sur E. L'ensemble $\mathcal{L}_2(E)$ des formes bilinéaires sur E est un espace vectoriel sur K.

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et notons $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ sa base duale. Alors une base de $\mathcal{L}_2(E)$ est $(e_i^*\otimes e_j^*)_{1\le i,j\le n}$. En particulier on a $\dim\mathcal{L}_2(E)=n^2$.

Démonstration. ✎ ■

Le résultat suivant est un outil important pour démontrer des résultats du cours d'algèbre bilinéaire.

Lemme 3.5 — Linéarisation de l'algèbre bilinéaire. L'application :

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathcal{L}_2(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,E^*) \\ & \varphi & \longmapsto & (y\mapsto\varphi(\cdot,y)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On notera u_φ l'image de φ par u.

Démonstration. ✎ ■

Représentation matricielle

Définition 3.6 — Matrice d'une forme bilinéaire dans une base. Soit $\varphi\in\mathcal{L}_2(E)$. Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. La **matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$** est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)=(\varphi(e_i,e_j))_{1\le i,j\le n}\quad\in M_n(K).$$

▪ **Remarque 3.7** C'est aussi la matrice d'une certaine application *linéaire*. Précisément, avec les notations du lemme 3.5 de linéarisation, on peut montrer que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(u_\varphi).$$

▪

Proposition 3.8 — Expression d'une forme bilinéaire à partir de sa matrice. Soit φ une forme bilinéaire sur E. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et deux vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ décomposés dans cette base. En posant $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $X = {}^t(x_1 \cdots x_n)$ et $Y = {}^t(y_1 \cdots y_n)$, on a alors :

$$\varphi(x,y) = {}^t XMY.$$

Démonstration. Comparer le résultat du produit matriciel ${}^t XMY$ à l'expression de la proposition 3.3. ■

Corollaire 3.9 — Formes bilinéaires et matrices carrées. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_2(E) & \longrightarrow & M_n(K) \\ \varphi & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. ■

Remarque. En prenant les dimensions dans le cor. 3.9, on retrouve $\dim \mathcal{L}_2(E) = (\dim E)^2$.

Théorème 3.10 — Formule de changement de base pour les formes bilinéaires. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et notons $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$. Alors on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^t P \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) P.$$

Démonstration. ■

Définition 3.11 — Matrices congruentes. Soient M et M' deux matrices de $M_n(K)$. Elles sont dites **congruentes** lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que $M' = {}^t PMP$.

C'est une relation d'équivalence sur $M_n(K)$. Elle correspond en fait à une *action à gauche du groupe* $\mathrm{GL}_n(K)$ *sur* $M_n(K)$, appelée **action par congruence (matricielle)**, définie par :

$$\forall P \in \mathrm{GL}_n(K),\ \forall M \in M_n(K) \quad P \star M = PM{}^tP.$$

Deux matrices de $M_n(K)$ sont congruentes si et seulement si elles sont dans la même orbite pour cette action.

3.1.2 Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques

Définition 3.12 — Forme bilinéaire symétrique. Une forme bilinéaire φ sur E est dite **symétrique** lorsqu'elle vérifie, pour tous x et y dans E, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$. L'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E est noté $\mathcal{S}_2(E)$.

■ **Exemple 3.13** ■

$\boxed{\text{On suppose jusqu'à la fin du chapitre que } \mathrm{car}(K) \neq 2.}$

L'énoncé suivant prolonge la proposition 3.4 et le corollaire 3.9.

Proposition 3.14 — Espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques, matrices symétriques.

1) L'ensemble $\mathcal{S}_2(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_2(E)$. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E alors une base de $\mathcal{S}_2(E)$ est $(e_i^* \otimes e_j^* + e_j^* \otimes e_i^*)_{1\le i\le j\le n}$. En particulier on a $\dim \mathcal{S}_2(E) = n(n+1)/2$.
2) Soit M la matrice d'une application bilinéaire φ dans une base $\mathcal{B}$ de E. Alors φ est symétrique si et seulement si ${}^tM = M$. On a ainsi l'isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_2(E) & \longrightarrow & S_n(K) \\ \varphi & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \end{array}$$

où $S_n(K)$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées symétriques dans $M_n(K)$.

Démonstration. ∎

Remarque. Que devient le lemme 3.5 de linéarisation pour les formes bilinéaires *symétriques* ? On peut montrer que $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$ est symétrique si et seulement si ${}^tu_\varphi \circ I = u_\varphi$ où $I : E \to E^{**}$ est l'isomorphisme canonique entre E et son bidual (th. 2.13). Cela correspond au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "I"] \arrow[rr, bend right, "u_\varphi"'] & E^{**} \arrow[r, "{}^tu_\varphi"] & E^* \end{tikzcd} .$$

Définition 3.15 — Forme quadratique. Une **forme quadratique** sur E est une application $q : E \to K$ telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique φ sur E satisfaisant, pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$. L'ensemble des formes quadratiques sur E est noté $\mathcal{Q}(E)$.

■ Exemple 3.16 ■

Une telle forme quadratique q satisfait, par bilinéarité et symétrie de φ :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in K, \quad q(x+y) = \qquad\qquad\qquad \text{et} \quad q(\lambda x) = \qquad\qquad (3.1)$$

Proposition 3.17 — Identités de polarisation, forme polaire. Soient q une forme quadratique sur E et $\varphi \in \mathcal{S}_2(E)$ une forme bilinéaire symétrique telle que, pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$. Pour tous vecteurs x et y de E, on a :

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2} \qquad\qquad\qquad = \frac{1}{4} \qquad\qquad\qquad .$$

En particulier, il existe une *unique* forme bilinéaire symétrique φ sur E telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$: on l'appelle la **forme polaire** de q.

Démonstration. Les identités s'obtiennent à partir de (3.1). L'unicité de la forme polaire étant donné q s'en déduit. ∎

Proposition 3.18 — L'espace vectoriel des formes quadratiques sur E. L'ensemble $\mathcal{Q}(E)$ est un espace vectoriel sur K. De plus l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_2(E) & \longrightarrow & \mathcal{Q}(E) \\ \varphi & \longmapsto & (x \mapsto \varphi(x,x)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, par lequel l'image réciproque d'une forme quadratique est sa forme polaire.

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors une base de $\mathcal{Q}(E)$ est $(x \mapsto e_i^*(x)e_j^*(x))_{1 \leq i \leq j \leq n}$. En particulier on a $\dim \mathcal{Q}(E) = n(n+1)/2$.

Représentation matricielle

Définition 3.19 — Matrice d'une forme quadratique dans une base. Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. La **matrice de q dans la base** $\mathcal{B}$ est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ de sa forme polaire φ dans la base $\mathcal{B}$. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$.

Notons que d'après la remarque 3.7, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(u_\varphi).$$

Notons M cette matrice. D'après la proposition 3.8, si $X = {}^t(x_1 \cdots x_n)$ désigne le vecteur des coordonnées de $x \in E$ dans la base $\mathcal{B}$, alors :

$$q(x) = {}^tXMX = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(e_i, e_j) x_i x_j. \tag{3.2}$$

Les propositions 3.18 et 3.14 mises bout à bout entraînent :

Proposition 3.20 — Formes quadratiques, matrices symétriques. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. L'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}(E) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(K) \\ q & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q). \end{array}$$

Remarque. En prenant les dimensions, on retrouve $\dim \mathcal{Q}(E) = \dim E(\dim E + 1)/2$.

Représentation polynomiale

Elle est liée aux coordonnées. Soient q une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire. Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux vecteurs de E décomposés dans cette base. La formule (3.2) et la symétrie entraînent :

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(e_i, e_j) x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i, e_i) x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varphi(e_i, e_j) x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$$

où $(a_{i,j})_{i,j}$ désignent les coefficients de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$. Ainsi q s'exprime comme une *fonction polynomiale homogène de degré* 2 en les coordonnées $x_1, \dots, x_n$.

Inversement, toute fonction polynomiale homogène de degré 2 en les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ définit une forme quadratique. En effet étant donné une telle fonction $q : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{i,j} x_i x_j$, on vérifie sans difficulté que l'application $\varphi : E \times E \to K$ définie par :

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{i,j}(x_i y_j + x_j y_i) \tag{3.3}$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E et que, pour tout $x \in E$, $\varphi(x,x) = q(x)$: ainsi q est une forme quadratique, de forme polaire φ.

La formule (3.3) est la **règle du dédoublement** : c'est la procédure décrivant les coefficients de la matrice de la forme quadratique à partir de l'expression de $q(x)$ comme polynôme homogène en les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$.

■ **Exemple 3.21** Soit E espace vectoriel de dimension 4 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_4)$ et soit $X \in E$ de coordonnées (x,y,z,t) dans cette base. Écrire la matrice de la forme quadratique donnée par :

$$q(X) = 2x^2 + xy + 3xt - y^2 + 2yz - yt + 3z^2$$

dans la base $\mathcal{B}$. ✎ ■

3.1.3 Noyau, rang, discriminant

Soient $q \in \mathcal{Q}(E)$ une forme quadratique et $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$ sa forme polaire.

Définition 3.22 — Noyau d'une forme quadratique ou bilinéaire symétrique ; énon dégénérescence. Le **noyau** de q (ou **noyau** de φ) est :

$$N(q) = N(\varphi) = \{y \in E \mid \forall x \in E, \varphi(x,y) = 0\}.$$

La forme quadratique q (resp. la forme bilinéaire symétrique φ) est dite **non dégénérée** lorsque $N(q)(= N(\varphi)) = \{0\}$.

Le noyau de q (ou de φ) est un sous-espace vectoriel de E. Ne pas le confondre avec l'ensemble des vecteurs $x \in E$ satisfaisant $q(x) = 0$ (voir plus loin la notion de vecteur isotrope).

✎ Lien entre $N(\varphi)$ et le noyau de u_φ.

Définition 3.23 — Rang d'une forme quadratique ou d'une forme bilinéaire symétrique. Le **rang** de q (ou le **rang** de φ) est défini comme $\dim E - \dim N(q)$. Il est noté $\operatorname{rg} q$ (ou $\operatorname{rg} \varphi$).

✎ Liens avec le rang de u_φ et le rang de la matrice de q (resp. φ) dans une base de E.

Théorème 3.24 — Caractérisations de la non-dégénérescence. Avec les notations précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes :

1) la forme quadratique q (ou la forme polaire φ) est non dégénérée ;
2) $\operatorname{rg} q (= \operatorname{rg} \varphi) = \dim E$;
3) l'application linéaire $u_\varphi : E \to E^*$ est un isomorphisme ;
4) il existe une base de E dans laquelle la matrice de la forme quadratique q (resp. la forme polaire φ) est inversible.

Démonstration. ✎ ■

Lorsque la forme bilinéaire symétrique φ est *non dégénérée*, l'application $u_\varphi : E \to E^*, y \mapsto \varphi(\cdot, y)$ est donc un isomorphisme. Cela généralise la situation que nous avions déjà rencontrée dans le lemme 2.19 avec le produit scalaire d'un espace euclidien.

Proposition 3.25 — Discriminant d'une forme quadratique. Soit q une forme quadratique *non dégénérée* sur E. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

Soit $K^{*2} = \{x^2 \mid x \in K^*\}$. Dans le groupe abélien K^*/K^{*2}, la classe du déterminant de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ est indépendante de $\mathcal{B}$. On l'appelle le **discriminant de** q et on la note $\mathrm{disc}(q)$.

Démonstration. ■

Interprétation matricielle

Deux matrices M et M' de $S_n(K)$ qui sont congruentes satisfont :

$$\mathrm{rg}\, M = \mathrm{rg}\, M' \qquad \text{et si } M \text{ et } M' \text{ sont inversibles, } \overline{\det M} = \overline{\det M'} \in K^*/(K^{*2}).$$

3.2 Orthogonalité et isotropie

3.2.1 Orthogonal pour une forme quadratique

Soient $q \in \mathcal{Q}(E)$ une forme quadratique et $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$ sa forme polaire.

Définition 3.26 — Vecteurs orthogonaux. Soient x et y vecteurs de E. On dit que x et y sont **φ-orthogonaux** (ou **q-orthogonaux**) lorsque $\varphi(x,y) = 0$ (ou, ce qui revient au même, $\varphi(y,x) = 0$).

Sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$, cela correspond à la notion classique de vecteurs orthogonaux.

Définition 3.27 — Orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriel de E. L'**orthogonal de** F **pour** φ (ou pour q) est :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F,\ \varphi(x,y) = 0\}.$$

La notation utilisée $\perp$ est la même que pour l'orthogonal au sens de la dualité (chapitre 2) mais la plupart du temps il ne devrait pas y avoir de confusion possible.

L'orthogonal $F^\perp$ pour φ est un sous-espace vectoriel de E.
Si $F = \mathrm{Vect}(A)$, alors $F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, \varphi(x,y) = 0\}$.
On constate aussi que :

$$N(\varphi) =$$

■ **Exemple 3.28** Soit $\varphi : K^2 \times K^2 \to K$ donnée par $\varphi((x,y),(x',y')) = xx' - yy'$. Soit $F = \mathrm{Vect}((1,1))$. Déterminer $F^\perp$. ■

Calcul pratique d'un orthogonal pour φ

Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$ un sous-espace vectoriel de E. L'orthogonal de F pour φ est :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall i \in \{1,\dots,k\},\ \varphi(x,u_i) = 0\}.$$

Déterminer une base de $F^\perp$ revient donc à résoudre un système linéaire homogène. Plus précisément soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E et soit L_i la matrice ligne de la forme linéaire $\varphi(\cdot,u_i)$ dans les bases $\mathcal{B}$ de E et (1) de K. En notant A la matrice de $M_{k,n}(K)$ dont les lignes sont $L_1,\dots,L_k$ et X le vecteur colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ alors :

$$x \in F^\perp \iff AX = 0.$$

On peut d'ailleurs remarquer que la ligne L_i n'est autre que ${}^t(MU_i)$ où $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et U_i est le vecteur colonne des coordonnées de u_i dans $\mathcal{B}$.

■ **Exemple 3.29** Soient E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_1 + e_2)$. Soit φ la forme bilinéaire symétrique donnée par sa matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base de $F^{\perp}$. ✐ ■

Le calcul du noyau de φ se ramène à celui du noyau de la matrice M. En effet, comme nous avons remarqué précédemment que $N(\varphi) = \mathrm{Ker}\, u_\varphi$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(u_\varphi)$, on a :

$$x \in N(\varphi) \iff MX = 0.$$

Pour démontrer sans trop d'effort les propriétés des orthogonaux pour une forme bilinéaire, nous avons besoin de faire le lien avec la notion d'orthogonal rencontrée au chapitre précédent.

Lemme 3.30 — Lien avec l'orthogonal au sens de la dualité. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $u_\varphi : E \to E^*$ l'image de la forme polaire φ par l'isomorphisme u de linéarisation (lemme 3.5). Alors l'orthogonal de F pour φ satisfait :

$$F^{\perp} = (u_\varphi(F))^0.$$

Démonstration. ✐ ■

Théorème 3.31 — Propriétés de l'orthogonal pour φ. Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. On a :

1) $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E + \dim(N(\varphi) \cap F)$;
2) $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$;
3) si φ est *non dégénérée* alors :
   (a) $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$;
   (b) $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$;
   (c) $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Démonstration. ✐ ■

✐

3.2.2 Vecteurs isotropes, cône isotrope

Soient $q \in \mathcal{Q}(E)$ une forme quadratique et $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$ sa forme polaire.

Définition 3.32 — Vecteur isotrope, cône isotrope. Un vecteur x de E est **isotrope** pour q lorsque $q(x) = 0$ c'est-à-dire x est q-orthogonal à lui-même. Le **cône isotrope** de q est $C(q) = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$.

Remarque. En algèbre linéaire, un *cône* est une partie d'un espace vectoriel qui est stable par multiplication scalaire. Cette propriété est satisfaite par le cône isotrope.
En géométrie, les *coniques* sont les cônes isotropes des formes quadratiques affines en dimension 2 (sur un espace affine $\mathcal{E}$, une forme quadratique affine peut être définie comme une application $f : \mathcal{E} \to K$ s'exprimant dans un repère par un polynôme de degré 2, qui n'est plus nécessairement homogène).

Le cône isotrope contient le vecteur nul mais ce n'est généralement pas un sous-espace vectoriel de E. Cependant on a toujours :

$$N(\varphi) \subset C(q).$$

■ **Exemple 3.33** Soit φ la forme bilinéaire symétrique sur K^2 de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique (e_1, e_2). Montrer que $N(\varphi) \subsetneq C(q)$. ✎ ■

Définition 3.34 — Sous-espace isotrope, totalement isotrope. Un sous-espace vectoriel F de E est dit **isotrope** lorsque $F \cap F^\perp \neq \{0\}$.
On dit que F est **totalement isotrope** lorsque $F \subset F^\perp$

Un sous-espace vectoriel non nul et totalement isotrope est en particulier isotrope. De plus on peut montrer que F est totalement isotrope si et seulement si $F \subset C(q)$.

■ **Exemple 3.35** ✎ ■

Théorème 3.36 — Caractérisations de la non-isotropie. Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1) F n'est pas isotrope (pour φ) ;
2) la restriction de φ à $F \times F$ est non dégénérée ;
3) $E = F \oplus F^\perp$.

Démonstration. ✎ ■

■ **Remarque 3.37** Supposons φ non dégénérée. Si F est totalement isotrope et comme alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$, on obtient $\dim F \leq (\dim E)/2$. ■

3.3 Bases orthogonales pour une forme quadratique

Soient $q \in \mathcal{Q}(E)$ une forme quadratique et $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$ sa forme polaire.

3.3.1 Définition et existence théorique d'une base orthogonale

Définition 3.38 — Base orthogonale pour une forme quadratique ou une forme bilinéaire symétrique. Une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E est dite ***q*-orthogonale** (ou **φ-orthogonale**) lorsqu'elle satisfait :

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, i \neq j, \quad \varphi(e_i, e_j) = 0.$$

✎

Proposition 3.39 — Caractérisations d'une base orthogonale. Avec les notations précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes :
1) la base $\mathcal{B}$ est q-orthogonale ;
2) la matrice de la forme quadratique q dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale ;
3) pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ de E décomposé dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} q(e_i) x_i^2.$$

Démonstration. ✎ ■

Théorème 3.40 — Existence d'une base q-orthogonale. Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E. Il existe une base de E qui est q-orthogonale.

Démonstration. Montrons par récurrence sur la dimension n de E l'assertion : « pour tout espace vectoriel E de dimension n et pour toute forme quadratique q sur E, il existe une base de E qui est q-orthogonale. » ✐ ■

✐ Base q-orthogonale et rang de q.

3.3.2 Existence en pratique : décomposition en carrés, méthode de Gauss

La méthode de réduction de Gauss permettra d'écrire toute forme quadratique comme combinaison linéaire de carrés de *formes linéaires* linéairement indépendantes.

Commençons par l'énoncé suivant, qui explique l'intérêt de disposer d'une telle décomposition : on peut en déduire de nombreuses informations sur la forme quadratique, en particulier une base q-orthogonale.

Théorème 3.41 — Informations tirées d'une décomposition en carrés. Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$ avec $n = \dim E$. Supposons qu'il existe $f_1, \dots, f_n$, famille libre (donc base) de n formes linéaires sur E et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans K tels que :

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)^2.$$

Alors :

1) La base antéduale de $(f_1, \dots, f_n)$ est une base q-orthogonale de E, notée $\mathcal{B}$, et :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

2) Le rang de q est $\mathrm{rg}\, q = \mathrm{Card}(\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \lambda_i \neq 0\})$.
3) Le noyau de q est $N(q) = \displaystyle\bigcap_{1 \le i \le n, \lambda_i \neq 0} \mathrm{Ker}\, f_i$.

Nous verrons aussi comment en déduire la signature dans le cas d'une forme quadratique réelle.

▪ **Remarque 3.42** Si on a $q(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x)^2$ avec $k < n$ et la famille $(f_1, \dots, f_k)$ libre (décomposition partielle en carrés), il suffit de compléter cette famille en une base $(f_1, \dots, f_n)$ de E^* et de poser $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ pour être dans le cadre d'application du théorème. ▪

Démonstration du théorème. ✐ ■

La méthode de réduction de Gauss

Voyons maintenant un algorithme permettant d'obtenir une telle décomposition en carrés. Combinée au théorème 3.41, elle redémontre au passage l'existence d'une base q-orthogonale.

Nous commençons par décrire la méthode en quelques mots puis en donnons une démonstration détaillée. *Les deux identités remarquables suivantes sont les outils essentiels de cet algorithme* :

$$x^2 + 2xy = (x+y)^2 - y^2 \quad \text{et} \quad xy = \frac{1}{4}\left((x+y)^2 - (x-y)^2\right).$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Une forme quadratique q est donnée par :

$$q(x) = q(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} \beta_{i,j} x_i x_j \tag{3.4}$$

avec $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(\beta_{i,j})_{1\leq i<j\leq n}$ des scalaires. La méthode se déroule par récurrence sur le nombre n de variables c'est-à-dire la dimension de E.

1) **Premier cas : l'expression de q comporte au moins une variable au carré** : il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$. On isole alors tous les termes en x_i et on fait apparaître le début de la première identité remarquable $(x_i + \cdots)^2$.
2) **Second cas : l'expression de q ne comporte aucune variable au carré**. Si q n'est pas nulle, il existe un terme non nul de la forme $\beta_{i,j}x_ix_j$. On isole alors tous les termes en x_i et x_j et on fait apparaître la deuxième identité remarquable :
$(x_i + \text{termes sans } x_i \text{ ni } x_j)(x_j + \text{termes sans } x_i \text{ ni } x_j) = \cdots$.

On itère ces manipulations sans toucher aux termes déjà réduits jusqu'à épuisement des termes de q.

■ **Exemple 3.43** $q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3$.
$q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_2x_3 + x_1x_3$. ■

Démonstration de la méthode. Récurrence sur n. Si $n = 1$, q est déjà nulle ou un carré d'une forme linéaire non nulle. Supposons $n \geq 2$ et la propriété établie pour toutes les formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension $\leq n-1$. Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension n donnée par (3.4).
Premier cas : il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$. Quitte à réordonner les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$. On isole tous les termes en x_1 et on factorise par le coefficient α_1 :

$$q(x) = \alpha_1 \left(x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\beta_{i,j}}{\alpha_1} x_1 x_i \right) + \text{termes en } x_2 \dots, x_n.$$

On s'efforce de reconnaître la première identité remarquable de la forme $(x_1 + \cdots)^2$:

$$x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\beta_{i,j}}{\alpha_1} x_1 x_i = \left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\beta_{i,j}}{2\alpha_1} x_i \right)^2 - \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{\beta_{i,j}}{2\alpha_1} x_i \right)^2.$$

Ainsi il existe une forme quadratique $q'(x_2, \dots, x_n)$ telle que :

$$q(x) = \alpha_1 \left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\beta_{i,j}}{2\alpha_1} x_i \right)^2 + q'(x_2, \dots, x_n).$$

En notant f la forme linéaire sur E définie par $f(x) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\beta_{i,j}}{2\alpha_1} x_i$, nous avons obtenu :

$$\forall x \in E, \;\; q(x) = \alpha_1 f(x)^2 + q'(x_2, \dots, x_n)$$

où q' est une forme quadratique sur $\mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$. L'hypothèse de récurrence appliquée à q' dit que q' est combinaison linéaire de carrés de formes linéaires $f_2, \dots, f_n$ en $x_2, \dots, x_n$ qui sont linéairement indépendantes. Ces formes linéaires se prolongent à E et la famille $(f, f_2, \dots, f_n)$ est encore libre : en effet, par définition de f, la décomposition de f dans la base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ fait intervenir e_1^* mais ce n'est pas le cas de $f_2, \dots, f_n$. L'assertion est démontrée.

Second cas : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ le coefficient α_i est nul. Si $q = 0$ alors on a $q = 0 \cdot f^2$ pour n'importe quelle forme linéaire non nulle f. Si $q \neq 0$, il existe un couple (i, j) avec $1 \leq i < j \leq n$ et

$\beta_{i,j} \neq 0$. Quitte à réordonner les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, on peut supposer que $\beta_{1,2} \neq 0$. On isole alors tous les termes en x_1 et x_2 et on factorise comme suit :

$$q(x) = \beta_{1,2}\left(x_1 + \frac{1}{\beta_{1,2}}\sum_{i=3}^{n}\beta_{2,i}x_i\right)\left(x_2 + \frac{1}{\beta_{1,2}}\sum_{i=3}^{n}\beta_{1,i}x_i\right) + \text{termes en } x_3,\dots,x_n.$$

Posons $\ell_1(x) = x_1 + \frac{1}{\beta_{1,2}}\sum_{i=3}^{n}\beta_{2,i}x_i$ et $\ell_2(x) = x_2 + \frac{1}{\beta_{1,2}}\sum_{i=3}^{n}\beta_{1,i}x_i$, de sorte que :

$$q(x) = \beta_{1,2}\ell_1(x)\ell_2(x) + q'(x_3,\dots,x_n)$$

où $q'(x_3,\dots,x_n)$ est une forme quadratique sur $\mathrm{Vect}(e_3,\dots,e_n)$. Noter que ℓ_1 et ℓ_2 sont des formes linéaires sur E et la famille (ℓ_1,ℓ_2) est libre dans E^*. Utilisons alors la seconde identité remarquable :

$$q(x) = \frac{\beta_{1,2}}{4}(\ell_1(x)+\ell_2(x))^2 - \frac{\beta_{1,2}}{4}(\ell_1(x)-\ell_2(x))^2 + q'(x_3,\dots,x_n)$$

En considérant les formes linéaires f_1 et f_2 définies par $f_1(x) = \ell_1(x)+\ell_2(x)$ et $f_2(x) = \ell_1(x)-\ell_2(x)$, on obtient :

$$\forall x \in E,\ \ q(x) = \frac{\beta_{1,2}}{4}f_1(x)^2 - \frac{\beta_{1,2}}{4}f_2(x)^2 + q'(x_3,\dots,x_n).$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à q' dit que q' est combinaison linéaire de carrés de formes linéaires $f_3,\dots,f_n$ en $x_3,\dots,x_n$ qui sont linéairement indépendantes. Ces formes linéaires se prolongent à E et la famille $(f_1,f_2,f_3,\dots,f_n)$ est encore libre : en effet (f_1,f_2) est libre, car (ℓ_1,ℓ_2) l'est, et les décompositions de f_1 et f_2 dans la base duale $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ font intervenir e_1^* ou e_2^*, mais ce n'est pas le cas de $f_3,\dots,f_n$. L'assertion est démontrée.

Par le principe de récurrence, le résultat est démontré pour toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie. ■

3.4 Classification des formes quadratiques

3.4.1 Généralités

Nous allons préciser ce que nous entendons par classifier les formes quadratiques. L'espace vectoriel E étant fixé, le groupe $\mathrm{GL}(E)$ *agit à gauche sur* $\mathcal{Q}(E)$ de la manière suivante :

$$\forall u \in \mathrm{GL}(E),\ \forall q \in \mathcal{Q}(E), \quad u \star q = (x \mapsto q(u^{-1}(x))).$$

✎ Description de l'action correspondante de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathcal{S}_2(E)$ (formes polaires).

Définition 3.44 — Équivalence de formes quadratiques. Deux formes quadratiques q et q' sur E sont **équivalentes** lorsqu'elles sont dans la même orbite pour cette action c'est-à-dire qu'il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ avec $q' = u \star q$.

Rappelons qu'on a aussi l'action à gauche par congruence de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur l'ensemble $S_n(K)$ des matrices *symétriques* :

$$\forall P \in \mathrm{GL}_n(K),\ \forall M \in S_n(K) \quad P \star M = PM\,{}^tP$$

D'après la formule de changement de base en bilinéaire, les différentes matrices représentant une forme quadratique donnée constituent une classe de congruence dans $\mathcal{S}_n(K)$.

Lemme 3.45 — Équivalence des formes quadratiques et matrices symétrique congruentes. Deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement si elles ont la même classe de congruence de matrices associées.

Démonstration. ✎ ■

Classifier les formes quadratiques sur E signifie décrire les orbites des formes quadratiques pour l'équivalence, ou, de manière équivalente par le lemme précédent, les orbites des matrices symétriques pour la congruence matricielle. D'après la page 33, nous connaissons déjà deux *invariants*, quantités constantes sur chaque orbite : le rang et le discriminant (ce dernier pour les formes quadratiques non dégénérées).

Nous aimerions avoir des *invariants totaux* qui caractérisent parfaitement chaque orbite ainsi qu'un représentant « canonique » de chaque orbite (*forme normale*). La résolution de ce problème ne peut se faire en toute généralité : elle dépend grandement du corps K considéré et de ses propriétés arithmétiques.

3.4.2 Classification sur $\mathbb{C}$

Théorème 3.46 — Formes quadratiques sur $\mathbb{C}$. Supposons $K = \mathbb{C}$. Soit q une forme quadratique sur E de rang r. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Avec les considérations du paragraphe précédent, on en déduit immédiatement :

Corollaire 3.47 — Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{C}$. Supposons $K = \mathbb{C}$ et soit E un K-espace vectoriel de dimension n.

1) Soit q une forme quadratique de rang r sur E. Il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \le i \le n}$ de E telle que :
$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E, \quad q(x) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2.$$
2) Toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ de rang r est congruente à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$. En particulier deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ sont congruentes si et seulement si elles ont même rang.
3) Deux formes quadratiques complexes sur E sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

✎ Cas des formes quadratiques non dégénérées sur $\mathbb{C}$.

Démonstration du théorème 3.46. ✎ ■

On constate que la démonstration de cette classification reste valable en remplaçant K par un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$.

3.4.3 Classification sur $\mathbb{R}$

Pour classifier les formes quadratiques sur $\mathbb{R}$, le rang seul ne suffit plus. Nous introduisons un invariant spécifique au cas réel. Supposons $K = \mathbb{R}$. Soient q une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire.

Définition 3.48 — Forme quadratique positive, négative. La forme quadratique q (ou la forme polaire φ) est dite :

— **positive** lorsque pour tout $x \in E$, $q(x) \geq 0$ (cette propriété est notée $q \geq 0$) ;

— **définie positive** lorsque pour tout $x \in E$ et $x \neq 0$, $q(x) > 0$ (cette propriété est notée $q > 0$) ;
— **négative** lorsque pour tout $x \in E$, $q(x) \leq 0$ (cette propriété est notée $q \leq 0$) ;
— **définie négative** lorsque pour tout $x \in E$ et $x \neq 0$, $q(x) < 0$ (cette propriété est notée $q < 0$).

✎ Cas d'un produit scalaire.

Définition 3.49 — Forme quadratique définie. La forme quadratique q est **définie** lorsque $C(q) = \{0\}$.

✎

Définition 3.50 — Signature d'une forme quadratique réelle. La **signature** de la forme quadratique téelle q est le couple (s,t) d'entiers naturels où :

$$s = \max_{\substack{F \text{ sev de } E \\ q_{|F} > 0}} (\dim F) \quad \text{et} \quad t = \max_{\substack{F \text{ sev de } E \\ q_{|F} < 0}} (\dim F).$$

✎ On a :

$$\begin{array}{llll} q > 0 \iff & , & q \geq 0 \iff \\ q < 0 \iff & , & q \leq 0 \iff \end{array}$$

Nous en venons à la classification sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3.51 — Formes quadratiques sur $\mathbb{R}$, théorème d'inertie de Sylvester. Supposons $K = \mathbb{R}$. Soit q une forme quadratique sur E de signature (s,t). Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0_{n-s-t} \end{pmatrix}.$$

En particulier on a $\operatorname{rg} q = s+t$.

✎ Terminologie « inertie ».

De même, on en déduit immédiatement :

Corollaire 3.52 — Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$. Supposons $K = \mathbb{R}$ et soit E un K-espace vectoriel de dimension n.

1) Soit q une forme quadratique de signature (s,t) sur E. Il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E telle que :
$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E, \quad q(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2.$$
2) Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple (s,t) d'entiers naturels tel que M est congruente à la matrice $\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0_{n-s-t} \end{pmatrix}$. Ce couple s'appelle la **signature** de la matrice symétrique réelle M. En particulier deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont congruentes si et seulement si elles ont même signature.
3) Deux formes quadratiques réelles sur E sont équivalentes si et seulement si elles ont même signature.

Démonstration du théorème 3.51. ✎ ■

Remarque. Et le discriminant ? ✐

Une décomposition en carrés, comme celle fournie par la méthode de réduction de Gauss, donne aussi la signature. L'énoncé suivant, qui découle du théorème d'inertie de Sylvester, complète donc le théorème 3.41.

Corollaire 3.53 — Décomposition en carrés et signature. Supposons $K=\mathbb{R}$. Soit $q\in\mathcal{Q}(E)$. Supposons qu'il existe $f_1,\ldots,f_n$, famille libre (donc base) de n formes linéaires sur E et $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ dans K tels que :

$$\forall x\in E,\quad q(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(x)^2.$$

Alors la signature de q est (s,t) où :

$$s=\mathrm{Card}(\{i\mid 1\leq i\leq n,\ \lambda_i>0\})\quad\text{et}\quad t=\mathrm{Card}(\{i\mid 1\leq i\leq n,\ \lambda_i<0\}).$$

Démonstration. ✐ ■

3.4.4 Classification sur un corps fini

Supposons $K=\mathbb{F}$, corps fini de caractéristique $\neq 2$. À nouveau, le rang seul ne suffit pas à classifier les formes quadratiques sur $\mathbb{F}$ et ici la notion de signature n'a pas de sens.

Si la forme quadratique q est non dégénérée, son discriminant $\mathrm{disc}(q)$ est un élément de $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$. Rappelons que, comme $\mathbb{F}$ est un corps fini, le groupe $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ est d'ordre 2 et

$$\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}=\{\overline{1},\overline{\varepsilon}\}$$

où $\varepsilon\in\mathbb{F}^*-\mathbb{F}^{*2}$.

Théorème 3.54 — Formes quadratiques sur $\mathbb{F}$. Supposons $K=\mathbb{F}$. Soient q une forme quadratique *non dégénérée* sur E de discriminant $\mathrm{disc}(q)$, et $\delta\in\{1,\varepsilon\}$ tel que $\mathrm{disc}(q)=\overline{\delta}$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)=\begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & \delta\end{pmatrix}.$$

On en déduit :

Corollaire 3.55 — Classification des formes quadratiques non dégénérées sur $\mathbb{F}$. Deux formes quadratiques *non dégénérées* sur un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes si et seulement si elles ont même discriminant.

✐ Écrire les deux énoncés équivalents : celui en termes de matrices symétriques congruentes et l'expression d'une forme quadratique en fonction de ses coordonnées (cf. corollaires 3.47 et 3.52)

Pour la démonstration du théorème, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.56 Pour tous $(a,b)\in\mathbb{F}^*\times\mathbb{F}^*$, l'équation $ax^2+by^2=1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{F}\times\mathbb{F}$.

Démonstration du théorème 3.54. ✐ ■

Remarque. *Si q n'est pas supposée non dégénérée*, on peut se ramener au cas non dégénéré de la manière suivante. Son noyau $N(q)$ étant un sous-espace vectoriel de E, on considère l'espace vectoriel quotient $E/N(q)$. Alors la forme quadratique q définit de manière naturelle une forme quadratique $q' : E/N(q) \to \mathbb{F}$ qui est, par construction, non dégénérée. Le théorème 3.54 entraîne alors l'énoncé suivant :

Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{F}$-espace vectoriel E de dimension finie. Notons r le rang de q et $\mathrm{disc}(q')$ le discriminant de la forme quadratique non dégénérée q'. Soit $\delta' \in \{1, \varepsilon\}$ tel que $\mathrm{disc}(q') = \overline{\delta'}$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} I_{r-1} & & 0 \\ & \delta' & \\ 0 & & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Ainsi deux formes quadratiques sur le $\mathbb{F}$-espace vectoriel E sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang et même discriminant.

3.4.5 Récapitulatif

K	Invariant total	Forme normale dans $\mathcal{Q}(E)$	Forme normale dans $\mathcal{S}_n(K)$
$\mathbb{C}$	rang r	$x_1^2 + \cdots + x_r^2$	$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ & 0_{n-r} \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}$	signature (s,t)	$x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_{s+t}^2$	$\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0_{n-s-t} \end{pmatrix}$
$\mathbb{F}$ fini	pour les f. quad. non dégénérées : discriminant $\overline{\delta} \in \{\overline{1}, \overline{\varepsilon}\}$	$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + \delta x_n^2$	$\begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & \delta \end{pmatrix}$

■ **Exemple 3.57** Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{S}_2(K)$. Donner la forme normale dans $\mathcal{S}_2(K)$ associée à M dans les cas suivants : $K = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{F}$ corps fini de caractéristique $\neq 2$. ■

3.5 Formes quadratiques sur un espace euclidien

Soit $(E, (\cdot,\cdot))$ un espace euclidien. Dans cette partie, nous allons voir ce qu'apporte l'existence de cette *structure euclidienne* à l'étude d'une forme quadratique *réelle* sur E. Nous supposons connue la notion d'endomorphisme symétrique et notons $\mathcal{S}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques de E. Rappelons que les endomorphismes symétriques sont ceux dont la matrice dans n'importe quelle base *orthonormée* de E est symétrique.

Le résultat suivant donne une identification *canonique* entre les endomorphismes symétriques et les formes quadratiques sur E. Il est à distinguer de la proposition 3.20.

Lemme 3.58 — Endomorphismes symétriques, formes quadratiques réelles. Soit $(E, (\cdot,\cdot))$ un espace euclidien. Pour tout $u \in \mathcal{S}(E)$, posons $q_u : x \mapsto (u(x), x)$. L'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{S}(E) & \longrightarrow & \mathcal{Q}(E) \\ & u & \longmapsto & q_u \end{array}$$

est un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels. De plus, pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q_u)$.

Démonstration. ■

À partir de ce résultat, nous pouvons définir la notion d'endomorphisme symétrique positif, défini positif, etc.

Définition 3.59 Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. L'endomorphisme symétrique u est dit *positif*, resp. *défini positif*, resp. *négatif*, resp. *défini négatif* lorsque la forme quadratique q_u est positive, resp. définie positive, resp. négative, resp. définie négative.

De même, on dit qu'une matrice symétrique réelle de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est *positive*, resp. *définie positive*, resp. *négative*, resp. *définie négative*, lorsque c'est la matrice dans une base orthonormée d'un endomorphisme positif, resp. défini positif, resp. négatif, resp. défini négatif.

Inversement, nous pourrions aussi parler des valeurs propres d'une forme quadratique réelle q sur l'espac euclidien E : ce sont les valeurs propres de l'endomorphisme symétrique u tel que $q_u = q$.

Remarque. Pour une forme quadratique sur un espace vectoriel quelconque, il n'est pas possible de définir de manière intrinsèque ses valeurs propres.

Rappelons le résultat fondamental de réduction des endomorphismes symétriques.

Théorème 3.60 — Théorème spectral.
1) Soient $(E, (\cdot,\cdot))$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Les valeurs propres de u sont réelles et il existe une base orthonormale (pour $(\cdot,\cdot)$) de E formée de vecteurs propres de u.
2) Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$^tOMO = O^{-1}MO = D.$$

Il permet de relier la signature d'une forme quadratique réelle sur un espace euclidien à ses valeurs propres. Cela donne une alternative à la méthode de réduction de Gauss pour calculer la signature (voir l'exercice 3.9).

Théorème 3.61 — Signature et valeurs propres. Soit q une forme quadratique sur l'espace euclidien E et soit (s,t) sa signature. Soit u l'endomorphisme symétrique de E tel que $q_u = q$. Alors s est le nombre de valeurs propres > 0 de u et t est le nombre de valeurs propres < 0 de u, toutes comptées avec multiplicité.

Démonstration. $\blacksquare$

De manière concrète, ces valeurs propres sont aussi celles de la matrice représentant l'endomorphisme symétrique u dans une base quelconque.

Le théorème spectral entraîne aussi un résultat de réduction pour un *couple de deux formes quadratiques réelles, l'une étant supposée définie positive*. Ce résultat renforce la simple existence d'une base orthogonale.

Théorème 3.62 — Pseudo-réduction simultanée.
1) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et q, q' deux formes quadratiques sur E. On suppose que *q est définie positive*. Alors il existe une base de E qui est orthonormée pour q et orthogonale pour q'.
2) Soient M et N deux matrices symétriques dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que M est *définie positive*. Alors il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$^tPMP = I_n \quad \text{et} \quad ^tPNP = D.$$

Remarque. Attention : dans cet énoncé et contrairement au théorème spectral, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E n'est pas supposé muni d'une structure euclidienne et la matrice inversible P n'est pas nécessairement orthogonale.

Démonstration. ✎ ∎

3.6 Groupe orthogonal d'une forme quadratique

Nous revenons au cas d'un espace vectoriel de dimension finie E sur un corps quelconque de caractéristique $\neq 2$.

3.6.1 Groupes orthogonal et spécial orthogonal

Rappelons l'action du groupe $\mathrm{GL}(E)$ à gauche sur $\mathcal{Q}(E)$ donnée par $u \star q : x \mapsto q(u^{-1}(x))$. L'étude des *orbites* de cette action correspondait à la classification des formes quadratiques sur E. L'étude de ses *stabilisateurs* amène maintenant à la notion de groupe orthogonal pour une forme quadratique.

Définition 3.63 — Groupe orthogonal d'une forme quadratique. Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$. Le **groupe orthogonal de q** est le stabilisateur de q pour cette action :

$$\mathrm{O}(q) = \{u \in \mathrm{GL}(E) \mid u \star q = q\} = \{u \in \mathrm{GL}(E) \mid \forall x \in E, q(u^{-1}(x)) = q(x)\}.$$

C'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Ses élément sont appelés les **isométries de E relativement à q**.

✎ Définition équivalente en fonction de la forme polaire φ de q.

Caractérisation matricielle d'une isométrie

Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$. Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$ et notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$u \in \mathrm{O}(q) \iff {}^tUMU = M.$$

✎

En particulier, si q est *non dégénérée* et si $u \in \mathrm{O}(q)$ alors $\det u \in \{\pm 1\}$.

▪ **Exemple 3.64 — Groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.** Si $K = \mathbb{R}$ et q est définie positive sur E alors la donnée d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ pour q fournit l'isomorphisme de groupes :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{O}(q) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u). \end{array}$$

✎ ▪

Définition 3.65 — Groupe spécial orthogonal. Le noyau du morphisme déterminant $\det : \mathrm{O}(q) \to K^*$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}(q)$, appelé le **groupe spécial orthogonal relativement à q**. Il est noté $\mathrm{SO}(q)$ ou $\mathrm{O}^+(q)$:

$$\mathrm{SO}(q) = \{u \in \mathrm{O}(q) \mid \det u = 1\}.$$

Ses éléments sont appelés les **rotations** ou **isométries positives** pour q.

Remarque. Si les formes quadratiques q et q' sont équivalentes, on peut voir que leurs groupes orthogonaux $\mathrm{O}(q)$ et $\mathrm{O}(q')$ sont conjugués : il existe $v \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $\mathrm{O}(q') = v^{-1}\mathrm{O}(q)v$. La réciproque est néanmoins fausse.

3.6.2 Exemple : les symétries orthogonales

Rappelons qu'une *symétrie vectorielle* de E est un endomorphisme u de E satisfaisant $u^2 = \mathrm{id}_E$. Soit u une telle symétrie. Notons E^+ (resp. E^-) le sous-espace propre de u associé à la valeur propre 1 (resp. -1). Alors on a $E = E^+ \oplus E^-$ et dans une base adaptée à cette décomposition, la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_m \end{pmatrix}$$

où $k = \dim E^+$ et $m = \dim E^-$. Pour tout vecteur $x = y + z$ décomposé dans $E^+ \oplus E^-$, on a $u(x) = y - z$. Une symétrie vectorielle est appelée :

— une *réflexion* lorsque $m = 1$ (i.e. E^+ est un hyperplan) ;
— un *renversement* lorsque $m = 2$.

✎

$\boxed{\text{On suppose jusqu'à la fin du chapitre que la forme quadratique } q \text{ est non dégénérée.}}$

Proposition 3.66 — Caractérisation d'une symétrie dans $\mathrm{O}(q)$. Soit u une symétrie vectorielle de E. On a :

$$u \in \mathrm{O}(q) \iff \forall x \in E^+,\ \forall y \in E^-, \quad \varphi(x,y) = 0$$

(i.e. les sous-espaces vectoriels E^+ et E^- sont orthogonaux pour q).

Démonstration. ✎ ■

Définition 3.67 — Symétrie orthogonale, réflexion orthogonale. Une **symétrie orthogonale** pour q est une symétrie vectorielle de E qui appartient à $\mathrm{O}(q)$. De même, on parle de **réflexion orthogonale** et de **renversement orthogonal** les cas échéants.

■ **Exemple 3.68** ✎ ■

Toute réflexion orthogonale est déterminée par son hyperplan stable E^+ ou, de manière équivalente, par la droite $(E^+)^\perp = E^-$. Cette droite est engendrée par un vecteur non isotrope a pour q. On a l'expression suivante pour la réflexion orthogonale u :

$$\forall x \in E, \quad u(x) = x - \frac{2\varphi(a,x)}{\varphi(a,a)} a.$$

3.6.3 Générateurs de $\mathrm{O}(q)$ et $\mathrm{SO}(q)$

Théorème 3.69 — Cartan–Dieudonné. Soit q une forme quadratique *non dégénérée* sur un espace vectoriel de dimension n.

1) Le groupe $\mathrm{O}(q)$ est engendré par les réflexions orthogonales. Plus précisément, tout élément de $\mathrm{O}(q)$ est produit d'au plus n réflexions orthogonales.
2) Pour $n \geq 3$, le groupe $\mathrm{SO}(q)$ est engendré par les renversements orthogonaux. Plus précisément, tout élément de $\mathrm{SO}(q)$ est produit d'au plus n renversements orthogonaux.

Démonstration. (Esquisse – voir par exemple *Cours d'Algèbre* de D. Perrin, p. 190.

1) Récurrence sur n.
2) D'après 1), tout élément de $\mathrm{SO}(q)$ est produit de k réflexions $r_1, \ldots, r_k$ avec $k \leq n$. En prenant le déterminant, on en déduit que k est pair. Pour démontrer 2), il suffit donc de prouver que tout produit de deux réflexions orthogonales est produit de deux renversements orthogonaux. Cela peut se faire par récurrence sur n.

■

Les générateurs de $\mathrm{SO}(q)$ pour $n = 2$, qui font l'objet d'un énoncé à part, généralisent la situation bien connue des isométries d'un plan euclidien.

Proposition 3.70 — Générateurs de $\mathrm{SO}(q)$ en dimension 2. Soit q une forme quadratique *non dégénérée* sur un espace vectoriel de dimension 2.

1) Les éléments de $\mathrm{O}(q) - \mathrm{SO}(q)$ sont les réflexions orthogonales.
2) Tout élément de $\mathrm{SO}(q)$ est produit de deux réflexions.
3) Le groupe $\mathrm{SO}(q)$ est abélien.

Démonstration. Voir par exemple *Cours d'Algèbre* de D. Perrin, p. 188. ■

3.7 Exercices

Exercice 3.1 — Formes polaires. *(À savoir faire)* Déterminer la forme bilinéaire symétrique correspondant à chaque forme quadratique q suivante :

1) E espace vectoriel muni d'une base (e_1, e_2, e_3), $q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_1x_2$,
2) $E = M_n(K)$; pour $A \in E$, $q(A) = (\mathrm{Tr} A)^2$,
3) $E = M_n(K)$; pour $A \in E$, $q(A) = \mathrm{Tr}(A^2)$.

Exercice 3.2 — Étude d'une forme quadratique. *(À savoir faire)*

Soit E un K-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$; on note x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un vecteur x dans cette base. Soit la forme quadratique q sur E définie par :

$$q(x) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2.$$

1) Donner la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$.
2) Exprimer q dans la base $\mathcal{B}' = (e_1 + e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3)$.
3) Déterminer le rang et le noyau de q.
4) Soient $v_1 = e_2 - 3e_3$, $v_2 = e_1 + e_3$ et $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Déterminer une base de $F^{\perp}$, l'orthogonal de F pour q.
5) On suppose $K = \mathbb{R}$. Déterminer la signature de q et une base q-orthogonale.
6) Que peut-on dire du cône isotrope de q ?

Exercice 3.3 — Calculs de signatures. *(À savoir faire)* Déterminer la signature des formes quadratiques réelles suivantes :

1) $E = \mathbb{R}^3$, $q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$; donner aussi une base q-orthogonale ;
2) $E = \mathbb{R}^3$, $q(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xy + yz + xz$;
3) $E = \mathbb{R}^3$, $q(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 2xz$;
4) $E = M_n(\mathbb{R})$, $q(A) = \mathrm{Tr}({}^tAA)$; donner aussi une base q-orthogonale ;
5) $E = M_n(\mathbb{R})$, $q(A) = \mathrm{Tr}(A^2)$.

Exercice 3.4 — Produit de deux formes linéaires. *(Classique)* Soient f_1 et f_2 deux formes linéaires non nulles sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Étudier (noyau, rang, signature, cône isotrope) la forme quadratique q sur E donnée par :

$$\forall x \in E, \quad q(x) = f_1(x) f_2(x).$$

Exercice 3.5 — Formes quadratiques sur un corps fini. Les formes quadratiques sur K^3 :

$$q : (x,y,z) \mapsto 2x^2 + 3y^2 - z^2 \quad \text{et} \quad q' : (x,y,z) \mapsto 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2yz + 5z^2$$

sont-elles équivalentes lorsque $K = \mathbb{F}_3$? $K = \mathbb{F}_5$? $K = \mathbb{F}_7$?

Exercice 3.6 — Vrai ou faux. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et q une forme quadratique sur E. Pour chaque assertion, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

1) Si q est non dégénérée, son seul vecteur isotrope est le vecteur nul.
2) Deux formes quadratiques non dégénérées sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.
3) Tout supplémentaire au noyau de q est orthogonal au noyau.
4) Toute forme quadratique définie est non dégénérée.
5) Si q est non dégénérée alors $q_{|F}$ est non dégénérée.

6) Toute matrice symétrique inversible de $M_n(\mathbb{C})$ s'écrit ${}^tPP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
7) On suppose $K = \mathbb{R}$. S'il existe une décomposition $E = F \oplus G \oplus H$ avec $q_{|F}$ définie positive, $q_{|G}$ définie négative et $q_{|H}$ nulle alors la signature de q est $(\dim F, \dim G)$.

Exercice 3.7 — Formes réelles positives. *(Classique)* Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire φ.

1) On suppose que q est positive. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout $(x,y) \in E \times E$,
$$|\varphi(x,y)| \leq q(x)^{1/2} q(y)^{1/2}.$$
Que peut-on dire du cas d'égalité ?
2) Montrer que $N(\varphi) = C(q)$ si et seulement si q est positive ou négative.
3) Montrer que si q est définie alors q est positive ou négative.

Exercice 3.8 — Sous-espace totalement isotrope. *(Classique)* Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie paire $2n$ et q une forme quadratique non dégénérée sur E. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

1) La signature de q est (n,n).
2) Il existe un sous-espace totalement isotrope de dimension n dans E.

Exercice 3.9 — Signature et valeurs propres. *(À savoir faire)* En étudiant la matrice symétrique réelle associée, déterminer la signature et une base orthogonale pour la forme quadratique suivante :

$$q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3,x_4) & \longmapsto & -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3. \end{array}$$

Exercice 3.10 — Critère de Sylvester pour les matrices définies positives. *(Classique)*

Soit M une matrice symétrique réelle de $M_n(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$ on appelle *mineur principal* Δ_k de M le déterminant de la matrice correspondant aux k premières lignes et aux k premières colonnes de M.

1) Si M est définie positive, montrer que tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.
2) Réciproquement, montrer que si tous les mineurs principaux de M sont strictements positifs alors M est définie positive (on pourra procéder par récurrence sur n).

Exercice 3.11 — Topologie des formes quadratiques non dégénérées. Soit $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$. Notons $\Omega(E)$ le sous-ensemble de $\mathcal{Q}(E)$ des formes quadratiques sur E non dégénérées.

1) Montrer que $\Omega(E)$ est un ouvert de $\mathcal{Q}(E)$.
2) Soit $q \in \Omega(E)$. Montrer qu'il existe F et G sous-espaces vectoriels de E avec $E = F \oplus G$ et un réel $k > 0$ tels que :
$$\forall x \in F,\ q(x) \geq k||x||^2 \quad \text{et} \quad \forall x \in G,\ q(x) \leq -k||x||^2.$$
3) Montrer qu'il existe une norme N sur $\mathcal{Q}(E)$ telle que si $q' \in \mathcal{Q}(E)$ vérifie $N(q - q') < k$ alors q et q' ont même signature.
4) En déduire que les composantes connexes de $\Omega(E)$ sont les :
$$\Omega_k(E) = \{q \in \Omega(E) \mid \mathrm{sign}(q) = (k, n-k)\} \qquad (0 \leq k \leq n).$$