Problème

Sur la représentation de permutation

Ce texte est adapté du problème 24 de J.-M. Arnaudiès, *Problèmes de préparation à l'agrégation interne de mathématiques : 2. Algèbre bilinéaire et géométrie*, Ellipses, 1999.

Dans tout le problème, K désigne un corps commutatif.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $u \in \mathrm{End}_K(E)$ un endomorphisme de E et soit M une matrice carrée de $M_n(K)$. Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de u (resp. M) sont unitaires et notés respectivement χ_u et μ_u (resp. χ_M et μ_M).

Pour tout entier $n \geq 1$, le n-ème polynôme cyclotomique de $\mathbb{C}[X]$ est noté $\Phi_n(X)$. On rappelle que $\Phi_n(X)$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et qu'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. On rappelle aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$.

Les parties II et III sont indépendantes.

Partie I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E le K-espace vectoriel K^n muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note f_σ l'élément de $\mathrm{End}_K(E)$ défini par :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

1) Démontrer que l'application $\sigma \mapsto f_\sigma$ définit un isomorphisme du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur un sous-groupe de $\mathrm{GL}_K(E)$.

2) Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, exprimer la trace et le déterminant de f_σ.

Partie II

On reprend les notations de la partie I.

1) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ un cycle de longueur n.

- **a)** Démontrer que $\chi_{f_\sigma}(X) = \mu_{f_\sigma}(X) = X^n - 1$.
- **b)** Lorsque $K = \mathbb{C}$, démontrer que f_σ est diagonalisable et en donner une base de vecteurs propres.
- **c)** Lorsque K est un corps algébriquement clos et de caractéristique un nombre premier p, on écrit $n = p^s m$ avec $s \in \mathbb{N}$ et $p \nmid m$; donner une condition nécessaire et suffisante sur s pour que f_σ soit diagonalisable puis une base de vecteurs propres dans ce cas.

2) On donne une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, distincte de l'identité. Soit $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_r$ une décomposition de σ en cycles de longueur au moins 2 et à supports deux à deux disjoints avec $r \geq 1$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on notera ℓ_i la longueur de γ_i.

- **a)** Notons k le nombre de points fixes de σ. Démontrer que

$$\chi_{f_\sigma}(X) = (X-1)^k \prod_{i=1}^{r} (X^{\ell_i} - 1)$$

et

$$\mu_{f_\sigma}(X) = \mathrm{ppcm}(X^{\ell_1} - 1, \ldots, X^{\ell_r} - 1).$$

- **b)** Lorsque $K = \mathbb{Q}$, exprimer $\mu_{f_\sigma}(X)$ en fonction des polynômes cyclotomiques $\Phi_d(X)$.

c) Lorsque $K = \mathbb{C}$, démontrer que f_σ est diagonalisable et en donner une base de vecteurs propres.

d) Lorsque K est un corps algébriquement clos et de caractéristique un nombre premier p, donner une condition nécessaire et suffisante pour que f_σ soit diagonalisable.

3) On suppose que le corps K est de caractéristique nulle.
Soient σ et τ des permutations de $\mathfrak{S}_n$ distinctes de l'identité telles que les endomorphismes f_σ et f_τ soient conjugués dans $\mathrm{GL}_K(E)$ (i.e. il existe $u \in \mathrm{GL}_K(E)$ tel que $f_\sigma = u \circ f_\tau \circ u^{-1}$).

a) Pour $i \geq 2$, notons $n_i(\sigma)$ (resp. $n_i(\tau)$) le nombre de cycles de longueur i dans la décomposition de σ (resp. de τ) en cycles à supports disjoints. Démontrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 2, \quad \sum_{m|i} n_i(\sigma) = \sum_{m|i} n_i(\tau).$$

b) En déduire que pour tout $i \geq 2$, $n_i(\sigma) = n_i(\tau)$.

c) Démontrer que les permutations σ et τ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$.

Partie III

On reprend les notations de la partie I. Le corps K est supposé de caractéristique nulle.

1) Soit D la droite vectorielle de E engendrée par le vecteur $\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} e_i$ et soit H l'hyperplan vectoriel de E dont une équation dans la base $\mathcal{B}$ est $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ (où $x_1, \ldots, x_n$ désignent les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$). Un sous-espace vectoriel de F de E est dit $\mathfrak{S}_n$-*stable* lorsque, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $f_\sigma(F) = F$.

a) Démontrer que D et H sont $\mathfrak{S}_n$-stables et que $E = D \oplus H$.

b) Démontrer que la projection vectorielle π de E sur D parallèlement à H est :

$$\pi = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma.$$

(On pourra démontrer le résultat suivant : pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ dans H et $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(j)} = 0$.)

c) Soit $v \in H - \{0\}$. Démontrer que la famille $(f_\sigma(v))_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$ engendre le sous-espace vectoriel H.

d) Déterminer les sous-espaces vectoriels $\mathfrak{S}_n$-stables de E.

2) On conserve les notations de la question III.1. Notons $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}_K(E)$ engendré par la famille $(f_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$.

a) Justifier que $\mathcal{A}$ est une sous-K-algèbre de $\mathrm{End}_K(E)$.

b) Soit Γ le *commutant* de $\mathcal{A}$ dans $\mathrm{End}_K(E)$ c'est-à-dire

$$\Gamma = \{u \in \mathrm{End}_K(E) \mid \forall \alpha \in \mathcal{A},\ \alpha \circ u = u \circ \alpha\}.$$

On note $K[\pi]$ la sous-K-algèbre de $\mathrm{End}_K(E)$ engendrée par π c'est-à-dire formée des endomorphismes de la forme $P(\pi)$ où P parcourt $K[X]$. Démontrer que $\Gamma = K[\pi]$.

c) Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, les sous-espaces vectoriels H et D sont stables par α d'après III1a. Soient respectivement $\mathcal{A}_H$ et $\mathcal{A}_D$ les sous-K-algèbres de $\mathrm{End}_K(H)$ et de $\mathrm{End}_K(D)$ images de $\mathcal{A}$ par les morphismes de K-algèbres :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathrm{End}_K(H) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha_{|H} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathrm{End}_K(D) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha_{|D} \end{array}$$

où $\alpha_{|H}$ et $\alpha_{|D}$ désignent les endomorphismes induits. L'application $(\alpha \mapsto \alpha_{|H}, \alpha_{|D})$ définit donc un isomorphisme de la K-algèbre $\mathcal{A}$ sur la K-algèbre produit $\mathcal{A}_H \times \mathcal{A}_D$ (on ne demande pas de vérifier cette assertion). Expliciter $\mathcal{A}_D$ dans $\mathrm{End}_K(D)$.

d) Démontrer que la dimension de $\mathcal{A}$ en tant que K-espace vectoriel est $1 + (n-1)^2$. Pour cela on pourra considérer la famille de vecteurs de $\mathcal{A}$ donnée par

$$f_{\mathrm{id}}, \quad f_{(1,i)} \ (2 \leq i \leq n), \quad f_{(1,j,k)} \ (2 \leq j < k \leq n), \quad f_{(1,k,j)} \ (2 \leq j < k \leq n)$$

où $(1,i)$ (resp. $(1,j,k)$, $(1,k,j)$) désigne la transposition (resp. les 3-cycles) selon les notations usuelles.

e) En déduire que $\mathcal{A}_H = \mathrm{End}_K(H)$.

f) Déterminer le commutant de Γ dans $\mathrm{End}_K(E)$.