Feuille d'exercices

Révisions sur les groupes

Sauf mention contraire, les groupes seront notés multiplicativement.
Les *indications* sont cliquables sur le fichier PDF et se trouvent en fin de feuille.

Exercice 1. (Sous-groupes d'un groupe cyclique)

Soit G un groupe cyclique d'ordre n engendré par un élément noté a.

1) Soit $d \in \mathbb{N}$ et $d \mid n$. Notons $H_d = \langle a^{\frac{n}{d}} \rangle$, le sous-groupe engendré par $a^{\frac{n}{d}}$. Montrer que H_d est d'ordre d et que $H_d = \{x \in G \mid x^d = 1_G\}$.
2) En déduire que pour tout $d \in \mathbb{N}$ avec $d \mid n$, il existe un unique sous-groupe de G d'ordre d et que ce sous-groupe est cyclique.

Exercice 2. (Groupes d'exposant fini)

Partie A : Cas général. Soit G un groupe.

1) Soit $H = \{k \in \mathbb{Z} \mid \forall x \in G,\ x^k = 1_G\}$. Montrer qu'il existe un unique entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $H = m\mathbb{Z}$.
2) Montrer que $m \neq 0$ si et seulement si : tous les éléments de G sont d'ordre fini et leurs ordres ne prennent qu'un nombre fini de valeurs distinctes. Dans ce cas, montrer que m est le ppcm des ordres des éléments de G.

   Lorsque $m > 0$, le groupe G est dit *d'exposant fini* et m s'appelle *l'exposant de G*.
3) Justifier que tout groupe fini G est d'exposant fini et que l'exposant de G divise alors l'ordre de G.

Partie B : Cas des groupes abéliens finis.

1) Soit G un groupe abélien, a et b des éléments d'ordres finis et premiers entre eux. Montrer que ab est d'ordre fini et $\mathrm{ord}(ab) = \mathrm{ord}(a) \cdot \mathrm{ord}(b)$.
2) Soit G un groupe abélien fini d'exposant m. Montrer que G possède un élément d'ordre m (on pourra utiliser, au choix, le théorème de structure des groupes abéliens finis ou la question précédente).
3) Application. Soient k un corps commutatif et $G \subset k^*$ un sous-groupe fini du groupe multiplicatif k^*. Montrer que G est cyclique. Indication

Partie C : Contre-exemples.

1) Donner un exemple de groupe infini et d'exposant fini.
2) Donner un exemple de groupe fini dont l'ordre n'est pas égal à son exposant.
3) Donner un exemple de groupe fini dont aucun élément n'est d'ordre égal à l'exposant.

Exercice 3. (Sous-groupes d'indice 2)

Soient G un groupe et H un sous-groupe d'indice 2 dans G. Montrer que H est normal dans G.

Exercice 4. (Théorème d'isomorphisme)

Soit Γ le groupe $\{z \in \mathbb{C}^* \mid \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1, z^n = 1\}$ des racines complexes de l'unité. Montrer que $(\Gamma, \cdot)$ est isomorphe à $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$. Indication

Exercice 5. (Centre d'un p-groupe ; groupes d'ordre p^2 et p^3)

Soit G un groupe. Dans cet exercice, p désigne un nombre premier.

1) Faisons agir G par conjugaison sur lui-même. Montrer que le centre $\mathrm{Z}(G)$ de G est constitué des éléments dont l'orbite est réduite à un point.
2) Si G est un p-groupe (c'est-à-dire un groupe d'ordre une puissance de p), montrer que $\mathrm{Z}(G) \neq \{1_G\}$.
3) Soit G un groupe tel que le groupe quotient $G/\,\mathrm{Z}(G)$ soit monogène. Montrer que G est abélien.
4) Montrer qu'un groupe d'ordre p^2 est nécessairement abélien. Que peut-on en déduire sur la classe d'isomorphisme de ce groupe ?
5) Donner un exemple de sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ qui est d'ordre p^3 et non abélien. Indication
6) Si G est un groupe non abélien d'ordre p^3, montrer que pour tous x, y dans G tels que $xy \neq yx$, le groupe G est engendré par x et y. Indication

Exercice 6. (Une action utile de G sur G/H)

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice fini noté n. Faisons agir G par translation sur l'ensemble des classes à gauche G/H :

$$\forall g \in G,\ \forall xH \in G/H, \quad g \star xH = (gx)H.$$

1) Montrer que le noyau du morphisme de groupes $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(G/H) \simeq \mathcal{S}_n$ associé à cette action est le plus grand sous-groupe de H qui est normal dans G. Montrer que, de plus, ce noyau est d'indice fini dans G. Indication
2) (Un théorème de Frobenius, qui généralise l'exercice 3).
   Soit G un groupe fini et p le plus petit facteur premier de son ordre. Soit H un sous-groupe d'indice p dans G. Montrer que H est normal dans G. Indication.

Exercice 7. (Quelques propriétés du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$)

Soit $n \geq 2$.

1) Montrer que le sous-groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.
2) Montrer que $\mathcal{A}_n$ est le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathcal{S}_n$.
3) On admet que $\mathcal{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$. Montrer que pour tout $n \geq 5$, les seuls sous-groupes normaux de $\mathcal{S}_n$ sont $\{\mathrm{id}\}$, $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$. Indication
   Que devient le résultat pour $n = 2$, 3 ou 4 ?
4) Soit H un sous-groupe d'indice n de $\mathcal{S}_n$ avec $n \geq 5$. L'action de $\mathcal{S}_n$ par translation sur l'ensemble $\mathcal{S}_n\,/H$ des classes à gauche (voir exercice 6) induit un morphisme de groupes $\varphi : \mathcal{S}_n \to \mathrm{Bij}(\mathcal{S}_n\,/H) \simeq \mathcal{S}_n$.
   (a) Montrer que φ est injectif.
   (b) En déduire que $H \simeq \mathcal{S}_{n-1}$. Indication

Indications

Exercice 2 question B.3) : considérer les racines du polynôme $X^m - 1 \in k[X]$ où m est l'exposant de G.
Exercice 4 : l'indication est dans l'intitulé de l'exercice.
Exercice 5 question 5) : chercher un sous-groupe constitué de matrices triangulaires.
Exercice 5 question 6) : considérer le sous-groupe $\langle x, y \rangle$.
Exercice 6 question 1) : montrer que $\operatorname{Ker} \varphi = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$.
Exercice 6 question 2) : montrer que φ induit par restriction et corestriction un morphisme $\psi : H \to \mathcal{S}_{p-1}$ puis étudier l'indice de $\operatorname{Ker} \psi$ dans H.
Exercice 7 question 3) : si H est un sous-groupe normal de $\mathcal{S}_n$, étudier $H \cap \mathcal{A}_n$.
Exercice 7 question 4)b : on pourra raisonner comme dans la question 2) de l'exercice 6.