Feuille d'exercices

Révisions sur les polynômes à plusieurs indéterminées

Dans toute la feuille, K désigne un corps commutatif.
Les *indications* sont cliquables sur le fichier PDF et se trouvent en fin de feuille.

Exercice 1. (Propriétés élémentaires d'anneaux de polynômes)

1) Montrer que l'anneau $K[x]$ est intègre et principal.
2) Qu'en est-il de l'anneau $K[x_1, \dots, x_n]$ avec $n \geq 2$?
3) Rappeler pourquoi l'anneau $K[x_1, \dots, x_n]$ est factoriel.

Exercice 2. (Fonctions polynomiales, prolongement des identités algébriques)

Soit $P \in K[x_1, \dots, x_d]$ avec $d \geq 1$. La *fonction polynomiale* $\widetilde{P}$ associée à P est définie par

$$\widetilde{P} : \begin{array}{ccc} K^d & \longrightarrow & K \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_d) & \longmapsto & P(\alpha_1, \dots, \alpha_d). \end{array}$$

1) Si $d = 1$ c'est-à-dire $P \in K[x]$, discuter la véracité de l'assertion : $P = 0 \iff \widetilde{P} = \widetilde{0}$.
2) On suppose que $d \geq 1$ et que *le corps K est infini.*
   a) Soit $P \in K[x_1, \dots, x_d]$ avec $P \neq 0$. Peut-on dire que l'application polynomiale $\widetilde{P}$ n'a qu'un nombre fini de zéros dans K^d ?
   b) Si $\widetilde{P} = \widetilde{0}$, démontrer que $P = 0$. Indication
   c) Plus généralement, si $\widetilde{P}$ est identiquement nulle sur $S_1 \times \cdots \times S_d$ où les S_i sont des parties infinies de K, démontrer que $P = 0$ (par une méthode similaire à celle de la question b).
   d) Soient $Q_1, \dots, Q_n$ des polynômes non nuls de $K[x_1, \dots, x_d]$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on pose $V(Q_i) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in K^d \mid Q_i(\alpha_1, \dots, \alpha_d) = 0\}$ et
   $$S = V(Q_1) \cup \cdots \cup V(Q_n).$$
   En utilisant la question 2b, démontrer que si l'application $\widetilde{P}$ est identiquement nulle sur $K^d - S$ alors $P = 0$ (*principe de prolongement des identités algébriques*). Indication
   e) *Application.* Si A et B sont deux matrices de $M_n(K)$, démontrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique. Indication
   f) *Application.* Démontrer que le K-espace vectoriel K^n n'est pas réunion d'un nombre fini d'hyperplans. Indication

Rappel. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur la K-algèbre $K[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes à n indéterminées de la manière suivante : $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ envoie $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ sur le polynôme ${}^\sigma P$ défini par :

$${}^\sigma P(X_1, \dots, X_n) = P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

Un polynôme P est dit *symétrique* lorsque pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, ${}^\sigma P = P$. Le *théorème des polynômes symétriques* affirme que tout polynôme symétrique s'écrit comme un unique polynôme en les polynômes symétriques élémentaires $s_1, \dots, s_n$, ces derniers étant définis par

$$s_p(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} X_{i_1} \cdots X_{i_p} \quad (1 \leq p \leq n).$$

Autrement dit, il y a un isomorphisme de K-algèbres de $K[S_1, \dots, S_n]$ vers la sous-algèbre de $K[X_1, \dots, X_n]$ formée des polynômes symétriques, qui est donné par $S_i \mapsto s_i$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 3. (Fractions rationnelles symétriques) Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle dans $K(X_1, \ldots, X_n)$. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on pose

$$^{\sigma}F = \frac{^{\sigma}P}{^{\sigma}Q}.$$

On dit que F est *symétrique* lorsque pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $^{\sigma}F = F$.

1) Montrer que toute fraction rationnelle symétrique peut s'écrire sous la forme $\frac{P_0}{Q_0}$ où P_0 et Q_0 sont des polynômes symétriques.
2) Montrer que l'application $K(S_1, \ldots, S_n) \to K(X_1, \ldots, X_n)$ qui envoie S_i sur s_i induit un isomorphisme entre $K(S_1, \ldots, S_n)$ et le sous-corps des fractions rationnelles symétriques de $K(X_1, \ldots, X_n)$.

Exercice 4. (Polynômes antisymétriques) Un polynôme $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ est dit *antisymétrique* lorsqu'il vérifie :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad ^{\sigma}P = \varepsilon(\sigma)P$$

où ε désigne la signature.

1) Montrer que le polynôme de Vandermonde $\Delta = \prod_{i<j}(X_i - X_j)$ est antisymétrique. Indication
2) On suppose que le corps K est de caractéristique $\neq 2$. Montrer que tout polynôme antisymétrique P s'écrit sous la forme ΔQ avec Q polynôme symétrique de $K[X_1, \ldots, X_n]$. Indication

Indications

Exercice 2 question 2b : raisonner par récurrence sur d.
Exercice 2 question 2d : considérer le polynôme $P \prod_{i=1}^{n} Q_i$.
Exercice 2 question 2e : traiter le cas où A est inversible, puis utiliser le principe de prolongement des identités algébriques.
Exercice 2 question 2f : raisonner par l'absurde et considérer le polynôme donné par le produit des formes linéaires définissant les hyperplans.
Exercice 4 question 1 : regarder ce qui se passe pour les transpositions.
Exercice 4 question 2 : montrer d'abord que Δ divise P dans $K[X_1, \ldots, X_n]$ à l'aide d'une division euclidienne bien choisie.